

Praktikum MATLAB®/Simulink® I

Prof. Dr.-Ing. U. Konigorski
Musterlösung



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

REGELUNGSTECHNIK *rtm*
UND MECHATRONIK

Praktikum MATLAB®/Simulink® I

Prof. Dr.-Ing. U. Konigorski

Musterlösung



Technische Universität Darmstadt
Institut für Automatisierungstechnik und Mechatronik
Fachgebiet Regelungstechnik und Mechatronik
Prof. Dr.-Ing. U. Konigorski

Landgraf-Georg-Straße 4
64283 Darmstadt
Telefon 06151/16-25200
www.rtm.tu-darmstadt.de

Das Gesamtdokument ist unter CC BY-ND veröffentlicht:



<https://creativecommons.org/licenses/by-nd/4.0/>

Der Inhalt dieses Dokuments ausschließlich der Logos, des Layouts und der Schriftarten ist unter CC BY-SA veröffentlicht:



<https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>



Inhaltsverzeichnis

Musterlösung Versuch 1	1
1.1 Matrizen	1
1.2 Polynome	4
1.3 Eigenwertproblem	7
Musterlösung Versuch 2	11
2.1 Grafiken	11
2.2 Schleifen und Funktionen	14
Musterlösung Versuch 3	19
3.1 Feder-Masse-Dämpfer-System	19
3.2 Gleichstrommotor	28
Musterlösung Versuch 4	33
4.1 Analyse des Systemverhaltens der Strecke	33
4.2 Reglerentwurf mit dem Frequenzkennlinienverfahren	41
4.2.1 Entwurf eines P-Reglers	41
4.2.2 Entwurf eines PI-Reglers	44
4.3 Reglerentwurf und Synthese nach dem Betragsoptimum	48
4.4 Vergleich der Reglerentwurfsverfahren	50
Musterlösung Versuch 5	53
5.1 Kurzeinführung in MATLAB/Simulink	53
5.2 Regelung des Ventilators in Simulink	54
5.3 Regelung des Pendelschraubers in Simulink	57
Musterlösung Versuch 6	75
6.1 Das SISO-Tool in MATLAB	75
6.2 Analyse des Pendelschraubers mit Hilfe der WOK	83
6.3 Analyse von Parameteränderungen mit Hilfe der WOK	90



Musterlösung Versuch 1

1.1 Matrizen

Versuchsdurchführung

1. Berechnen Sie für

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \end{bmatrix}$$

die Produkte AB , AC , BC , BA , CA und AC^T , falls diese definiert sind.

$$AB = \text{n.e.}$$

$$AC = \text{n.e.}$$

$$\text{n.e. :}$$

$$BC = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$BA = \text{n.e.}$$

$$CA = \begin{bmatrix} -8 & 3 \\ 12 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$AC^T = \begin{bmatrix} -6 & 12 & -1 \\ 4 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Welche Summen $A + B$, $A + C$ und $B + C$ können Sie bilden? Begründen Sie Ihre Antwort.

Die Summen $A + B$, $A + C$ und $B + C$ existieren nicht, da die Matrizen A , B und C nicht die gleiche Dimension haben.

3. Berechnen Sie $(BC) \cdot (-AD + 3D)$.

$$(BC) \cdot (-AD + 3D) = 63$$

4. Gegeben sei die Matrix $E = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$. Existiert die Inverse? Falls ja, bestimmen Sie die

Inverse und alle Vektoren v mit $E \cdot v = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Die Inverse der Matrix \mathbf{E} existiert, da $\det(\mathbf{E}) = 8$ gilt.

$$\mathbf{E}^{-1} = \begin{bmatrix} 0,25 & -1,1250 & 0,3750 \\ 0,25 & 0,3750 & -0,1250 \\ -0,5 & 0,25 & 0,25 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{E}^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -0,8750 \\ 0,6250 \\ 0,7500 \end{bmatrix}$$

5. Lösen Sie folgendes lineares Gleichungssystem auf zwei verschiedene Arten.

$$\begin{array}{rrcr} x_1 & & + & 2x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ 4x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 7 \end{array}$$

Benennen Sie die beiden Möglichkeiten, die MATLAB bietet, um den Lösungsvektor zu bestimmen und geben Sie die Lösung an. Welche der Möglichkeiten sollte bevorzugt werden?

1. Möglichkeit: $\mathbf{A} \setminus \mathbf{b}$,
2. Möglichkeit: $\text{inv}(\mathbf{A}) * \mathbf{b}$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,2 \\ -5 \\ -1,6 \end{bmatrix}$$

Es sollte die erste Möglichkeit (Berechnung über den \setminus -Operator) bevorzugt werden.

6. Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = 1 - j$, $z_2 = -1 + \sqrt{3}j$ und $z_3 = \frac{3}{1-j}$. Geben Sie Realteil, Imaginärteil und Argument der Zahlen an und berechnen Sie

- $\frac{(z_1 + z_2)^2}{2 \cdot (z_1 + z_2^2) + 4\sqrt{3}j}$
- $\overline{z_1 z_2} \cdot (3 + j) \cdot |z_1 z_2^2|$

Hinweis: `help imag`, `help abs`, `help real`, `help angle`

	z_1	z_2	z_3
Realteil	1	-1	1,5
Imaginärteil	-1	$\sqrt{3}$	1,5
Argument	-0,7854	2,0944	0,7854

$$\frac{(z_1 + z_2)^2}{2 \cdot (z_1 + z_2^2) + 4\sqrt{3}j} = 0,1340 - 0,1340j$$

$$\overline{z_1 z_2} \cdot (3 + j) \cdot |z_1 z_2^2| = 27,8781 - 428,2233j$$

7. Gegeben sei die Matrix

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 4 & 1 \\ 2 & 8 & 0 \end{bmatrix}.$$

- Bestimmen Sie das charakteristische Polynom von F und dessen Nullstellen.
- Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von F.
- Vergleichen Sie die Ergebnisse.

Charakteristisches Polynom:

$$P(x) = x^3 - 5x^2 - 24x - 54$$

Nullstellen:

$$x_1 = 8,5471, \quad x_2 = -1,7736 + 1,7811j, \quad x_3 = -1,7736 - 1,7811j$$

Eigenwerte:

$$D = \begin{bmatrix} 8,5471 & 0 & 0 \\ 0 & -1,7736 + 1,7811j & 0 \\ 0 & 0 & -1,7736 - 1,7811j \end{bmatrix}$$

Eigenvektoren:

$$V = \begin{bmatrix} 0,6995 & 0,8901 & 0,8901 \\ 0,4327 & -0,2277 - 0,1182j & -0,2277 + 0,1182j \\ 0,5687 & -0,2551 + 0,2772j & -0,2551 - 0,2772j \end{bmatrix}$$

Vergleichen Sie die Ergebnisse:

In der Diagonalen der Matrix D stehen die Nullstellen des charakteristischen Polynoms.

8. Erzeugen Sie eine 3-dimensionale ($3 \times 3 \times 3$)-Matrix $A(i, j, k)$, die für $k = 1$ nur Einsen, für $k = 2$ die Einheitsmatrix und für $k = 3$ Dreien in der oberen Dreiecksmatrix (Rest Nullen) enthält.

Hinweis: help tril

Fügen Sie hier Ihren MATLAB-Code zur Erzeugung der $(3 \times 3 \times 3)$ -Matrix ein:

```
A=zeros(3,3,3);  
A(:,:,1)=ones(3,3);  
A(:,:,2)=eye(3);  
A(:,:,3)=triu([3 3 3;3 3 3;3 3 3]);
```

9. Gegeben sind folgende Vektoren:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 6j \\ 3 \\ -7j \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 9j \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} -3j \\ -2j \\ j \end{bmatrix}$$

a) Berechnen Sie \mathbf{x}^H , $\mathbf{y}\mathbf{z}^H$, $\mathbf{y}^H\mathbf{z}$ und $\mathbf{y}^T\mathbf{z}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^H &= [-6j \quad 3 \quad 7j] & \mathbf{y}\mathbf{z}^H &= \begin{bmatrix} 6j & 4j & -2j \\ 12j & 8j & -4j \\ -27 & -18 & 9 \end{bmatrix} \\ \mathbf{y}^H\mathbf{z} &= 9 - 14j & \mathbf{y}^T\mathbf{z} &= -9 - 14j \end{aligned}$$

b) Geben Sie den Befehl an, mit welchem für einen beliebigen Vektor \mathbf{y} dessen Transponierte berechnet wird.

```
>> y.'
```

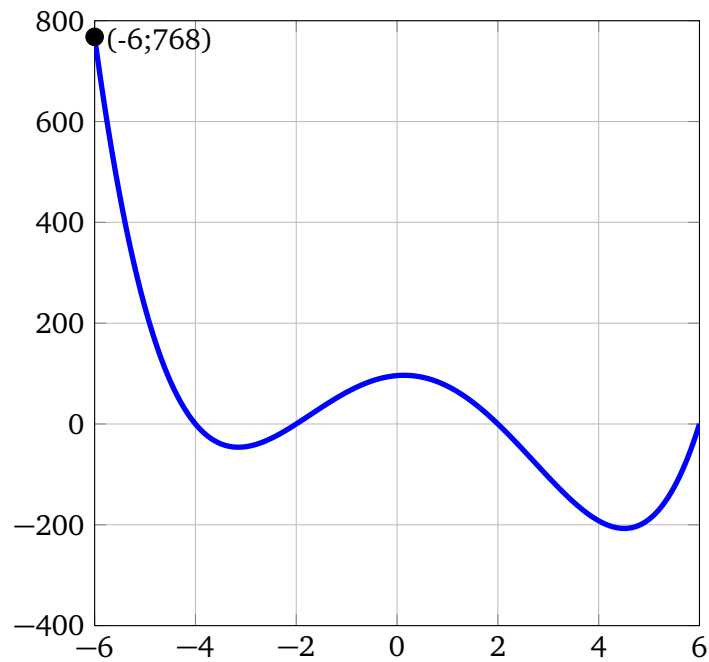
c) Geben Sie den Befehl an, mit welchem die konjugiert-komplexe Matrix berechnet wird.
Hinweis: Es ist *nicht* die konjugiert-komplex *transponierte* Matrix gemeint.

```
>> conj(...)
```

1.2 Polynome

1. Fitten Sie mit polyfit in folgenden Grafen.

Gehen Sie dabei wie folgt vor:



Wählen Sie die Ordnung des Polynoms (Begründung der Wahl):

Die Funktion hat drei Extremstellen, daher sollte ein Polynom 4. Ordnung gewählt werden.

Wählen Sie eine geeignete Anzahl von Stützstellen:

$$x_1 = -6; \quad x_2 = -4; \quad x_3 = -2; \quad x_4 = 2; \quad x_5 = 6$$

Berechnen Sie die Koeffizienten des Polynoms:

$$a = 1; \quad b = -2; \quad c = -28; \quad d = 8; \quad e = 96$$

Geben Sie die Polynomgleichung an:

$$P(x) = x^4 - 2x^3 - 28x^2 + 8x + 96$$

2. Gegeben sei folgendes Polynom:

$$y = -x^2 + 10x^3 - 7 + 3x$$

Berechnen Sie die Nullstellen, die erste und zweite Ableitung und lösen Sie alle drei Polynome im Bereich von $x = -5, \dots, 5$.

Nullstellen:

$$x_1 = -0,3529 + 0,8627j; \quad x_2 = -0,3529 - 0,8627j; \quad x_3 = 0.8058$$

Erste Ableitung: $y'(x) = 30x^2 - 2x + 3$

Zweite Ableitung: $y''(x) = 60x - 2$

Stützpunkte:

	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
Polynom 1	-1297	-675	-295	-97	-21	-7	5	75	263	629	1233
Polynom 2	763	491	279	127	35	3	31	119	267	475	743
Polynom 3	-302	-242	-182	-122	-62	-2	58	118	178	238	298

3. Berechnen Sie die Zerlegung der folgenden Partialbrüche:

- $\frac{3x+9}{6x^2+3x+4}$
- $\frac{5x+9}{6x^3+3x+4x^4}$

$$\bullet \frac{3x+9}{6x^2+3x+4} = \frac{0,25-0,8845j}{x+0,25-0,7773j} + \frac{0,25+0,8845j}{x+0,25+0,7773j}$$

mit $r = \begin{bmatrix} 0,25 - 0,8845j \\ 0,25 + 0,8845j \end{bmatrix}$ $p = \begin{bmatrix} -0,2500 + 0,7773j \\ -0,2500 - 0,7773j \end{bmatrix}$ $k = []$

$$\bullet \frac{5x+9}{6x^3+3x+4x^4} = \frac{-0,0099}{x+1,7460} + \frac{-1,4951-0,2723j}{x-0,1230-0,6438j} + \frac{-1,4951+0,2723j}{x-0,1230+0,6438j} + \frac{3}{x}$$

mit

$$r = \begin{bmatrix} -0,0099 \\ -1,4951 - 0,2723j \\ -1,4951 + 0,2723j \\ 3,0000 \end{bmatrix} \quad p = \begin{bmatrix} -1,7460 \\ 0,1230 + 0,6438j \\ 0,1230 - 0,6438j \\ 0 \end{bmatrix} \quad k = []$$

4. Berechnen Sie die Polynomdivision der folgenden Polynome:

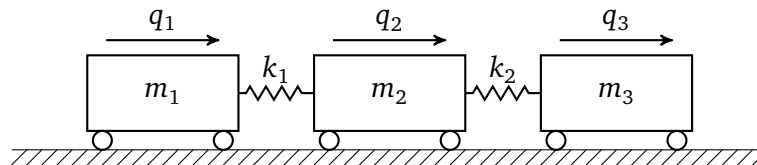
- $\frac{6x^2+3x+4}{3x+9}$
- $\frac{6x^3+3x+4x^4}{5x+9}$

$$\bullet \frac{6x^2+3x+4}{3x+9} = 2x - 5 + \frac{49}{3x+9}$$

$$\bullet \frac{6x^3+3x+4x^4}{5x+9} = (0,8x^3 - 0,24x^2 + 0,432x - 0,1776) + \frac{1,5984}{5x+9}$$

1.3 Eigenwertproblem

Gegeben sei folgendes Modell eines Zuges:



Für die Massen und Steifigkeiten gilt:

$$k_1 = 600 \frac{\text{N}}{\text{m}}, k_2 = 800 \frac{\text{N}}{\text{m}}, m_1 = 2000 \text{ kg}, m_2 = 2000 \text{ kg}, m_3 = 5000 \text{ kg}$$

Hausaufgabe

1. Stellen Sie die Bewegungsgleichungen des Systems auf.

$$\begin{aligned} 0 &= m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k_1 x_2 \\ 0 &= m_2 \ddot{x}_2 - k_1 x_1 + (k_1 + k_2) x_2 - k_2 x_3 \\ 0 &= m_3 \ddot{x}_3 - k_2 x_2 + k_2 x_3 \end{aligned}$$

2. Schreiben Sie anschließend die Bewegungsgleichungen in Matrixform:

$$\mathbf{M} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ \ddot{q}_3 \end{bmatrix} + \mathbf{K} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0}$$

$$0 = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q}$$

$$0 = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \mathbf{q}$$

$$0 = \begin{bmatrix} 2000 & 0 & 0 \\ 0 & 2000 & 0 \\ 0 & 0 & 5000 \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} + \begin{bmatrix} 600 & -600 & 0 \\ -600 & 1400 & -800 \\ 0 & -800 & 800 \end{bmatrix} \mathbf{q}$$

3. Setzen Sie den Lösungsansatz $\mathbf{q}(t) = \hat{\mathbf{q}} \cdot e^{\alpha t}$ in die Bewegungs-DGL ein und bringen Sie diese damit in die Form des allgemeinen Eigenwertproblems:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{B}\mathbf{x}$$

Finden Sie eine geeignete Substitution für α .

$$\ddot{\mathbf{q}} = \alpha^2 \cdot \mathbf{q}$$

$$\mathbf{K}\hat{\mathbf{q}} = -\alpha^2\mathbf{M}\hat{\mathbf{q}}$$

Mit der Substitution $-\alpha^2 = \lambda$ ergibt sich:

$$\mathbf{K}\hat{\mathbf{q}} = \lambda\mathbf{M}\hat{\mathbf{q}}$$

4. Leiten Sie aus dem allgemeinen Eigenwertproblem das spezielle Eigenwertproblem her, welches die Form $\mathbf{A}\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ hat.

Wird die Gleichung des allgemeinen Eigenwertproblems mit \mathbf{M}^{-1} von links durchmultipliziert, ist das spezielle Eigenwertproblem hergeleitet:

$$\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\hat{\mathbf{q}} = \lambda\hat{\mathbf{q}}$$

Somit ist leicht erkennbar, dass $\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$ gilt.

Versuchsdurchführung

Hinweis: Verwenden Sie die Ergebnisse der Hausaufgabe für die Versuchsdurchführung.

1. Lösen Sie nun mit MATLAB das spezielle Eigenwertproblem und ermitteln Sie daraus die Eigenwerte und die dazugehörigen Eigenvektoren des Systems. Bestimmen Sie durch Rücksubstitution die mechanischen Eigenwerte.

Eigenwerte und Eigenvektoren des speziellen Eigenwertproblems:

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,927 \\ 0,233 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$$\hat{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{q}}_1 & \hat{\mathbf{q}}_2 & \hat{\mathbf{q}}_3 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} -0,4242 & -0,8807 & 0,5774 \\ 0,8865 & -0,1967 & 0,5774 \\ -0,1849 & 0,4309 & 0,5774 \end{bmatrix}$$

Mechanische Eigenwerte (Frequenzen des Systems) und Eigenvektoren:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1^2 \\ \alpha_2^2 \\ \alpha_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda_1 \\ -\lambda_2 \\ -\lambda_3 \end{bmatrix}$$

\Downarrow

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm\sqrt{-\lambda_1} \\ \pm\sqrt{-\lambda_2} \\ \pm\sqrt{-\lambda_3} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha_{1,2} \\ \alpha_{2,2} \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pm 0,9628j \\ \pm 0,4827j \\ 0 \end{bmatrix}$$

Die Eigenvektormatrix bleibt gleich.

2. Welche Eigenbewegungsformen hat das System? Erläutern Sie kurz!

Die ersten vier mechanischen Eigenwerte $\alpha_{1,2}$ und $\alpha_{2,2}$ sind jeweils zueinander konjugiert komplex und α_3 ist gleich Null.

Das bedeutet, dass das mechanische System zwei harmonische, ungedämpfte Schwingungen (zwei konjugiert-komplexe Eigenwerte) und eine Starrkörperbewegung (Eigenwert in Null) durchführen kann.

Musterlösung Versuch 2

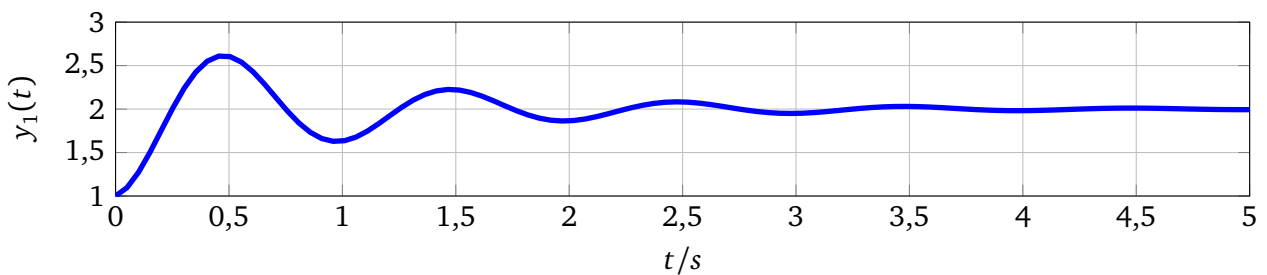
2.1 Grafiken

Versuchsdurchführung

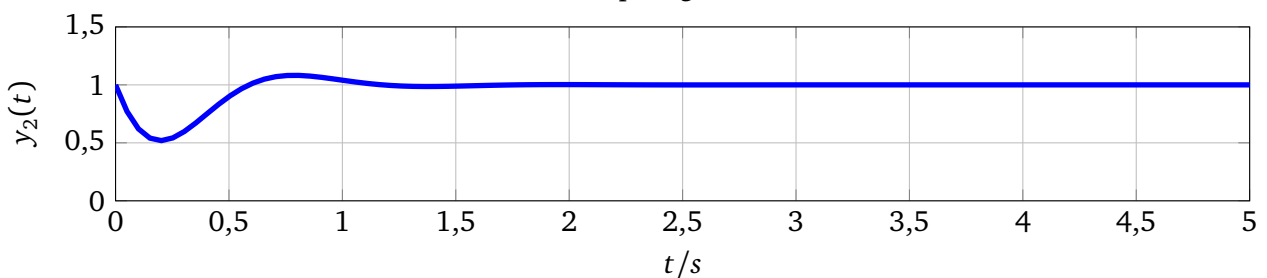
1. Schreiben Sie einen MATLAB-Code, der die Sprungantworten in ein Figure gemäß Abbildung 2.1 plottet. Berücksichtigen Sie dabei die Anordnung, Linienart und -stärke (Stärke = 2), Beschriftung und die Legende. Die Achsenskalierung kann vernachlässigt werden. Die Funktionen lauten:

$$y_1 = 2 - e^{-t} \cos(2\pi t)$$
$$y_2 = 1 - e^{-3t} \sin(1,7\pi t)$$

1. Sprungantwort



2. Sprungantwort



Vergleich beider Sprungantworten

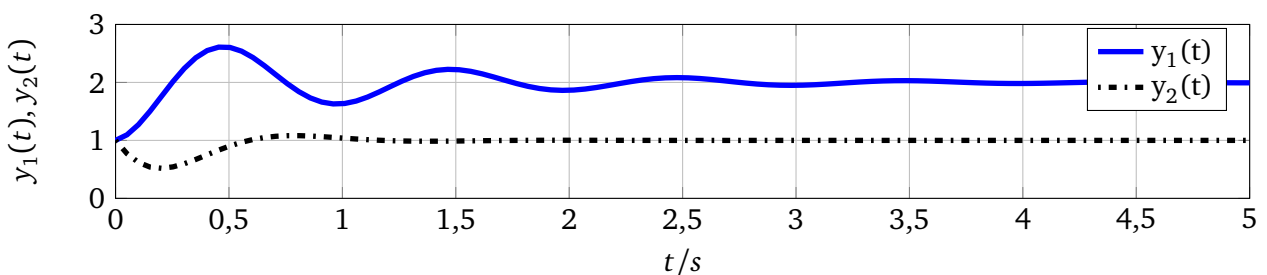


Abbildung 2.1: Sprungantworten

Geben Sie den Code zum plotten der Sprungantworten hier an:
Für jeden Fehler bzw. fehlenden Befehl:

```
t = linspace(0,5);

y_1 = 2 - exp(-t) .* cos(2 * pi * t);
y_2 = 1 - exp(-3*t) .* sin(1.7 * pi * t);

figure; % Öffnen eines neuen Grafikfensters
subplot(3, 1, 1);
plot(t, y_1, 'linewidth', 2)
xlabel('t / s')
ylabel('y_1(t)')
title('1. Sprungantwort')
grid on;

subplot(3, 1, 2);
plot(t, y_2, 'linewidth', 2)
xlabel('t / s')
ylabel('y_2(t)')
title('2. Sprungantwort')
grid on;

subplot(3, 1, 3);
plot(t, y_1, 'b', t, y_2, '-.k', 'linewidth', 2)
legend('y_1(t)', 'y_2(t)')
xlabel('t / s')
ylabel('y_1(t), y_2(t)')
title('Vergleich beider Sprungantworten')
grid on;
```

2. Plotten Sie den Einheitskreis wie in Abbildung 2.2. Überlegen Sie sich dazu, wie Sie aus einer Sinus- und Cosinusfunktion einen Kreis erzeugen können. Denken Sie an die Achsenbeschriftung und den Titel.

Geben Sie den Code zum Plotten des Einheitskreises hier ein:

```
t = 0:pi/32:2*pi;
x = sin(t);
y = cos(t);
figure
plot(x, y);
xlabel('x')
ylabel('y')
title('Einheitskreis')
grid on
```

3. Erzeugen Sie mit Hilfe des Befehls `mesh` oder `surf` eine Einheitskugel gemäß Abbildung 2.3. Verwenden Sie **nicht** den Befehl `sphere`.

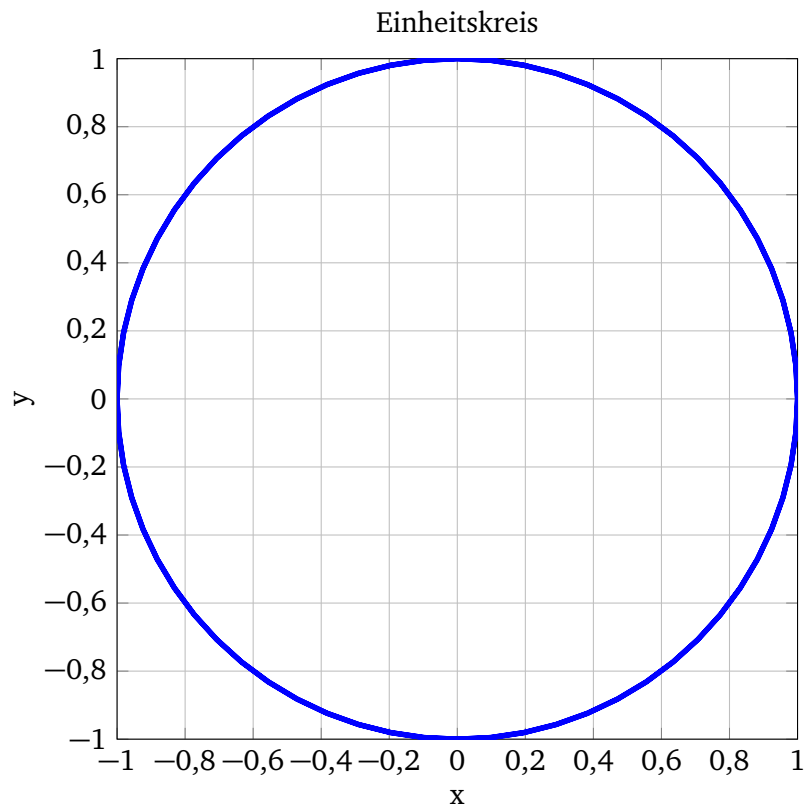


Abbildung 2.2: Einheitskreis

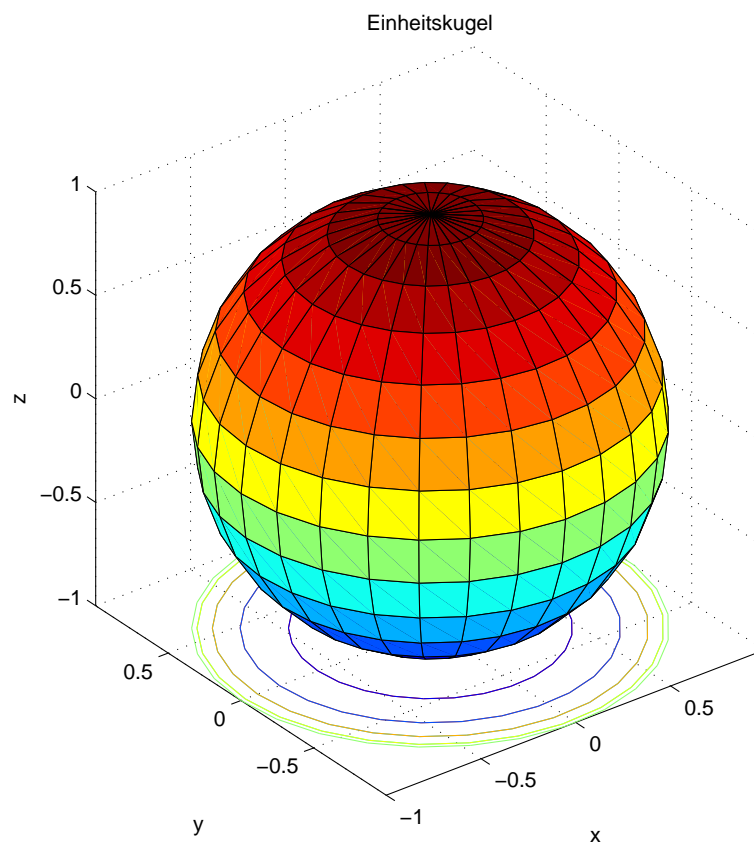


Abbildung 2.3: Einheitskugel

Geben Sie den Code zum Plotten der Einheitskugel hier an:

```
figure;
[p, t] = meshgrid(linspace(-pi, pi, 30), linspace(0, pi, 15));
X = cos(p) .* sin(t);
Y = sin(p) .* sin(t);
Z = cos(t);
surfc(X, Y, Z);
xlabel('x')
ylabel('y')
zlabel('z')
title('Einheitskugel')
```

2.2 Schleifen und Funktionen

Hausaufgabe

1. a) Schreiben Sie eine Funktion $[s] = \text{Summe}(x)$, die die Elemente eines beliebigen Vektors x mit Hilfe einer Schleife addiert.

```
function [s] = Summe(x)

s = 0;

n = length(x);

for k=1:n
    s = s + x(k);
end
```

- b) Schreiben Sie eine weitere Funktion $[p] = \text{Fakultaet}(n)$, die mit Hilfe einer Schleife das Produkt der Zahlen $1, \dots, n$ berechnet.

```
function [p] = Fakultaet(n)

p = 1;

for j = 1:n
    p = p * j;
end
```

2. Schreiben Sie eine Funktion, die den geometrischen und arithmetrischen Mittelwert von beliebig langen Vektoren bildet.

Der Funktionskopf soll folgendermaßen aussehen:

```
function [arithm, geom] = Berechnung_Mittelwerte(x)
```

Hinweis: Die Mittelwerte werden nach folgender Vorschrift berechnet:

Geometrischer Mittelwert: $x_{\text{geo}} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i}$

Arithmetrischer Mittelwert: $x_{\text{ari}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

Verwenden Sie hierfür **nicht** die Befehle `prod()` und `mean()`. Sie dürfen Ihre Funktionen aus der obigen Aufgabe verwenden.

Geben Sie hier Ihren Code an:

```
function [arithm, geom] = Berechnung_Mittelwerte(x)
% Berechnung arithmetischer Mittelwert von x
summe = 0;
n = length(x);
for k = 1:n
    summe = summe + x(k);
end
arithm = summe / n;

% Berechnung geometrischer Mittelwert von x
fak = 1;
for k = 1:n
    fak = fak * x(k);
end
geom = fak^(1/n);
```

Versuchsdurchführung

1. Schreiben Sie ein Skript, welches als Input den Vornamen eines Gruppenmitglieds erwartet und Ihnen, je nach eingegebenem Namen, die zugehörige Heimatstadt ausgibt. Geben Sie eine Fehlermeldung aus, wenn der Input nicht einem Vornamen eines Gruppenmitglieds entspricht.

Verwenden Sie hierfür ein Switch-case-Konstrukt.

Beispiel:

Nach Programmstart erscheint:

Vorname: |

Eingabe von Martin und Bestätigung mit Return ergibt:

Vorname: Martin

Karlsruhe

>>|

Geben Sie hier Ihren Code an:

```
Name = input('Vorname:', 's');
switch Name
case 'Hans'
    disp 'Darmstadt'
case 'Martin'
    disp 'Karlsruhe'
case 'Peter'
    disp 'Hamburg'
otherwise
    disp 'nicht gefunden'
end
```

2. Schreiben Sie aufbauend auf der Hausaufgabe ein Skript, welches die Mittelwerte von k beliebigen $(1 \times n)$ -Vektoren berechnet. Erzeugen Sie diese Vektoren mit `rand`. Schreiben Sie die jeweils berechneten Mittelwerte in tabellarischer Form (arithmetrischer Mittelwert in die erste Spalte und geometrischer Mittelwert in die zweiten Spalte) in ein externes File „Mittelwerte.m“. Achten Sie darauf, dass bei der Berechnung von neuen Mittelwerten die alten Mittelwerte im m-File nicht gelöscht werden!

Erweitern Sie anschließend ihr Skript derart, dass die Daten aus „Mittelwerte.m“ gelesen und anschließend in die $(k \times 2)$ -Matrix Mittelwerte geschrieben werden.

Geben Sie hier Ihren Code an:

```
% Erzeugen der externen Mittelwerte.m-Datei
fid = fopen('Mittelwerte.m', 'a');
k = 5;      % Anzahl der zu berechnenden Mittelwerte
n = 5;      % Länge Vektor

% Erzeugen und Schreiben der Werte
for i=1:k
    x = 10 * rand(1, n);
    [arithm, geom] = Berechnung_Mittelwerte(x);
    fprintf(fid, '%g\t', arithm);
    fprintf(fid, '%g\n', geom);
end
fclose(fid);

% Einlesen der Daten und überführen in Matrix Mittelwerte
fid = fopen('Mittelwerte.m', 'r');
Mittelwerte = fscanf(fid, '%g %g', [2 inf]);
Mittelwerte = Mittelwerte.';
fclose(fid);
```

3. Schreiben Sie eine Funktion `Determinate()`, die die Determinante einer beliebigen $(n \times n)$ -Matrix berechnet. Die Berechnungsvorschrift lautet:

$$n = 2 : \quad \det \mathbf{A} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$n > 2 : \quad \det \mathbf{A} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det \mathbf{A}_{ij}$$

wobei \mathbf{A}_{ij} durch Wegstreichen der i -ten Zeile und j -ten Spalte von \mathbf{A} erzeugt wird. Die Determinante soll hier immer nach der ersten Zeile entwickelt werden ($i = 1$).

Verwenden Sie **nicht** den `det`-Befehl von MATLAB.

Geben Sie hier Ihren Code an:

```
function [det_Wert] = Determinante(A)

dim_A = size(A); % Bestimmung Dimension von A
n = dim_A(1);    % Bestimmung n

if n == 2
    det_Wert = A(1,1) * A(2,2) - A(2,1) * A(1,2);
    return
end

det_Wert = 0;

for j = 1:n
    B = A;          % Einführung Zwischenvariable
    B( 1, : ) = []; % Löschen 1.te Zeile
    B( :, j ) = []; % Löschen j.te Spalte
    det_Wert = det_Wert + (-1)^(1+j) * A(1,j) * Determinante(B);
end
```

- Schreiben Sie ein Skript, welches eine zufällige $(n \times n)$ -Matrix (Elementwerte zwischen 0, ..., 10) erzeugt.

Berechnen Sie die Determinante dieser Matrix anhand Ihrer Funktion `Determinante()` und des MATLAB-Befehls `det()`.

Geben Sie hier Ihren Code an:

```
n = 5;
A = 10 * rand(n);    % Erzeugung einer (nxn)-Matrix
                     % mit beliebigen Werten
                     % zwischen 0 und 10

% Berechnung Determinante nach selbstgeschriebener
% Funktion, wobei nach der 1. Zeile entwickelt wird

det_A = Determinante(A);

% Berechnung Determinante mit Hilfe des vordefinierten
% MATLAB-Befehls

det_Matlab = det(A);
```

5. Ergänzen Sie den Code um den folgenden Vergleich:

```
fprintf('Unsere Berechnung liefert:\t det(A)=%g\n', det_A)
fprintf('Matlab-Befehl:\t\t\t\t det(A)=%g\n', det_Matlab)
fprintf('\n')

if (abs(det_A) >= 0.99 * abs(det_Matlab))
    && (abs(det_A) <= 1.01 * abs(det_Matlab))
    disp('Die Determinante wurde richtig berechnet');
else
    disp('Die Determinante wurde falsch berechnet') ;
end
```

Die Fehlertoleranz beträgt 1 %

Musterlösung Versuch 3

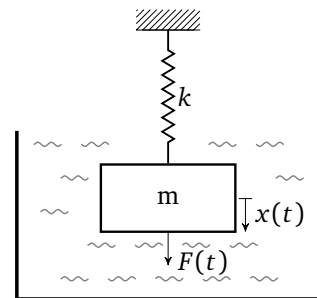
3.1 Feder-Masse-Dämpfer-System

Gegeben ist ein Federpendel, dessen Masse ($m = 4 \text{ kg}$) sich in einer viskosen Flüssigkeit befindet. Angeregt wird das System (siehe Abbildung) durch die Kraft F :

$$F(t) = \hat{F} \cos(\omega t)$$

mit $\hat{F} = 2 \text{ N}$ und $\omega = 0,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Beachten Sie, dass die Auslenkung $x(t)$ um die stationäre Ruhelage betrachtet wird und daher die Gewichtskraft nicht in die Gleichung mit eingeht. Die durch die Flüssigkeit erzeugte Reibung kann als viskose (geschwindigkeitsproportionale) Dämpfung angenommen werden. Für die Dämpfungskonstante gilt $d = 3 \text{ N/(m/s)}$ und für die Federkonstante $k = 1 \text{ N/m}$. Die Anfangsauslenkung $x(t = 0)$ sowie die Anfangsgeschwindigkeit $\dot{x}(t = 0)$ sind gleich Null.

Hinweis: Führen Sie die Rechnungen mit den Variablennamen durch und setzen Sie die Zahlenwerte wo verlangt erst am Ende ein.

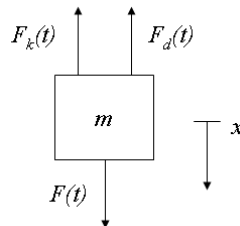


Hausaufgaben

Herleitung der DGL

1. Leiten Sie die Bewegungsdifferentialgleichung für das dynamische System her. Um was für eine DGL handelt es sich?

Freischneiden des Systems:



Aufstellen der Gleichung:

$$F_d(t) = d \cdot \dot{x}(t) \quad \text{Viskose Reibkraft}$$

$$F(t) = \hat{F} \cos(\omega t) \quad \text{Externe Kraft}$$

$$F_k(t) = k \cdot x(t) \quad \text{Federkraft}$$

Die Kräftebilanz an Masse m liefert:

$$m\ddot{x}(t) = -F_k - F_d + F(t)$$

$$\ddot{x}(t) + \frac{d}{m}\dot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = \frac{\hat{F}}{m}\cos(\omega t)$$

Es handelt sich um eine gewöhnliche, lineare und inhomogene Differentialgleichung.

Vorbereitung zur analytischen Lösung

2. Bestimmen Sie $X(s)$ im Laplace-Bereich und die Lösung mit Zahlenwerten.

$$\mathcal{L}(\cos \omega t) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$X(s) \cdot \left(s^2 + \frac{d}{m}s + \frac{k}{m} \right) = \frac{\hat{F}}{m} \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$X(s) = \frac{\hat{F}}{m} \cdot \frac{s}{s^2 + \omega^2} \cdot \frac{1}{s^2 + \frac{d}{m}s + \frac{k}{m}} = \frac{0,5s}{s^2 + 0,25} \cdot \frac{1}{s^2 + 0,75s + 0,25}$$

Vorbereitung zur numerischen Lösung

3. Überführen Sie die hergeleitete Differentialgleichung in ein DGL-System erster Ordnung.

Durch Einführung der Zustände

$$x_1 = x$$

$$x_2 = \dot{x}_1 = \dot{x}$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{d}{m}x_2 + \frac{1}{m}F(t)$$

folgt

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{d}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} F(t)$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{b} \cdot F(t)$$

4. Zur Erzeugung des DGL-Systems erster Ordnung schreiben Sie die Funktion:

```
function dx = DGL_System_Aufgabe1(t, x)
```

Hinweis: Arbeiten Sie mit den Variablennamen. Die entsprechenden Zahlenwerte müssen innerhalb der Funktion bekannt sein.

Geben sie hier den Code an, der das DGL-System erzeugt:

```
% Funktion zur Erzeugung von dx
```

```
function dx = DGL_System_Aufgabe1(t, x)
```

```
    d = 3; k = 1; m = 4; F = 2; omega=0.5;
```

```
    dx = [0 1; -k/m -d/m] * x + [0; F/m] * cos(omega*t);
```

```
end
```

Vorbereitung zur diskreten Lösung

5. Stellen Sie, ausgehend von der obigen Differentialgleichung, die Differenzengleichung in rekursiver Form auf (Ausgangsgröße $x(kT_0)$ in Abhängigkeit von der Eingangsgröße $F(kT_0)$ und von den vergangenen Werten $x((k-1)T_0)$ und $x((k-2)T_0)$).

Hinweis: Approximieren Sie zunächst die Ableitungen $\dot{x}(t)$ und $\ddot{x}(t)$ in Differenzenform.

Es gilt:

$$\dot{x}(t) \approx \frac{\Delta x}{\Delta t} \stackrel{\Delta t=T_0}{=} \frac{x(kT_0) - x((k-1)T_0)}{T_0}$$

$$\ddot{x}(t) \approx \frac{\Delta\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)}{\Delta t} = \frac{x(kT_0) - 2x((k-1)T_0) + x((k-2)T_0)}{T_0^2}$$

Einsetzen in obige Bewegungsdifferentialgleichung liefert:

$$\frac{\hat{F}}{m} \cos(\omega(kT_0)) = \frac{x(kT_0) - 2x((k-1)T_0) + x((k-2)T_0)}{T_0^2} + \frac{d}{m} \frac{x(kT_0) - x((k-1)T_0)}{T_0} + \frac{k}{m} x(kT_0)$$

$$x(kT_0) = C_1 x((k-1)T_0) + C_2 x((k-2)T_0) + C_3 \frac{\hat{F}}{m} \cos(\omega(kT_0))$$

mit:

$$C_1 = \frac{2m + dT_0}{m + dT_0 + kT_0^2} \quad C_2 = -\frac{m}{m + dT_0 + kT_0^2} \quad C_3 = \frac{mT_0^2}{m + dT_0 + kT_0^2}$$

Versuchsdurchführung

1. Schreiben Sie ein Skript Variablen.m, das den Variablen d, k, m, F und omega Zahlenwerte übergibt und einen Vektor Parameter anlegt:

```
d = 3;  
k = 1;  
m = 4;  
F = 2;  
Parameter = [k, d, m, F];  
  
omega = 0.5;
```

Analytische Lösung

2. Schreiben Sie ein MATLAB-Skript Partialbruchzerlegung.m zur Berechnung der Partialbruchzerlegung von $X(s)$. Bringen Sie ihr Ergebnis in die folgende Form und speichern Sie die Zähler Ihrer Ergebnisse in den Variablen P1 und P2:

$$\frac{P_1}{s^2 + \omega^2} + \frac{P_2}{s^2 + \frac{d}{m}s + \frac{k}{m}}$$

Berechnen Sie auch die Nenner.

Hinweis: Arbeiten Sie mit den Variablennamen. Benutzen Sie den Befehl `residue` und die Ergebnisse der Hausaufgabe.

Geben Sie hier Ihren Code an:

```
% Definition Polynome
p1 = [1, 0, omega^2];
p2 = [1, d/m, k/m];

pz = [F/m, 0];          % Zählerpolynom
pn = conv(p1, p2); % Nennerpolynom

[r, p, K] = residue(pz, pn);

% Übertragungsfkt 1
pz1 = conv(r(1), [1, -p(2)]) + conv(r(2), [1, -p(1)]);
                                                    % Zählerpolynom ÜF1
pn1 = conv([1, -p(1)], [1, -p(2)]);          % Nennerpolynom ÜF1

% Übertragungsfkt 2
pz2 = conv(r(3), [1, -p(4)]) + conv(r(4), [1, -p(3)]);
                                                    % Zählerpolynom ÜF2
pn2 = conv([1, -p(3)], [1, -p(4)]);          % Nennerpolynom ÜF2

% Ergebnis speichern
% (ggf. aufgrund der endlichen Rechengenauigkeit vorhandene Imaginärteile
% durch real() entfernen.)
P1 = real( pz1(2) );
P2 = real( pz2(2) );
```

Die Partialbruchzerlegung liefert:

$$X(s) = \frac{2/3}{s^2 + 0,25} + \frac{-2/3}{s^2 + 0,75s + 0,25}$$

Bestimmen Sie jetzt durch Rücktransformation die analytische Lösung.

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega} \sin \omega t &= \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s^2 + \omega^2} \right) \\ \frac{\omega_0^2}{\omega_e} e^{-D\omega_0 t} \sin(\omega_e t) &= \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{\omega_0^2}{s^2 + 2D\omega_0 s + \omega_0^2} \right) \\ \text{mit } \omega_e &= \omega_0 \sqrt{1 - D^2} \end{aligned}$$

3. Schreiben Sie eine Funktion, die die analytische Lösung auswertet.

```
function [x, t] = AnalytischeLoesung(Parameter, omega, T, P1, P2)
```

T = Zeitpunkt, bis zu dem die Lösung bestimmt werden soll.

Hinweis: Arbeiten Sie mit den Variablennamen. Übernehmen Sie die Variablen P1 und P2 aus der Partialbruchzerlegung.

Herleitung:

$$\omega_0^2 = 0,25 \Rightarrow \omega_0 = 0,5$$

$$2D\omega_0 = 0,75 \Rightarrow D = 0,75$$

$$\omega_e = \omega_0 \sqrt{1 - D^2} = 0,3307$$

Hinweis: Die Transformationsvorschrift hat ω_0^2 im Zähler, die Übertragungsfunktion nicht!

$$x(t) = \frac{4}{3} \sin(0,5t) - \frac{2}{3\omega_e} e^{-0,375t} \sin(\omega_e t)$$

Geben Sie hier Ihren Code zur Bestimmung der analytischen Lösung an:

```
function [x, t] = AnalytischeLoesung(Parameter, omega, T, P1, P2)
    k = Parameter(1); d = Parameter(2);
    m = Parameter(3);
    % F = Parameter(4); % F ist schon in P1 und P2 berücksichtigt!

    t = (0:1/100:T).';
    w0 = sqrt(k / m);
    D = d / (2 * m * w0);
    we = w0 * sqrt(1 - D^2);

    x = P1 / omega * sin(omega .* t) + ...
        P2 / we * exp(-D * w0 * t) .* sin(we * t);
```

Numerische Lösung

4. Schreiben Sie eine Funktion, die das DGL-System numerisch löst. Zur Wahl stehen die Solver ode23s und ode23.

```
function [x, t] = NumerischeLoesung(T, x0, Wahl)
```

Parameter:

- T = Zeitpunkt, bis zu dem die Lösung bestimmt werden soll.
- x0 = Anfangsbedingungen
- Wahl = Auswahl Solver (1 → ode23s; 2 → ode23)

Hinweis: Nicht alle Zustände sind von Interesse, daher entsprechend bei der Ausgabe berücksichtigen. Verwenden Sie die Ergebnisse der Hausaufgabe.

Geben Sie hier Ihren Code an, der das DGL-System numerisch löst:

```
function [x, t] = NumerischeLoesung(T, x0, Wahl)

    if (Wahl == 1)
        % Expliziter Solver
        [t, x] = ode23s('DGL_System_Aufgabe1', [0, T], x0);
    else
        % Impliziter Solver
        [t, x] = ode23('DGL_System_Aufgabe1', [0, T], x0);
    end

    % nur x1(t) --> 1. Zustandsvariable ist von Interesse!
    x = x(:,1);
end
```

Diskrete Lösung

5. Schreiben Sie eine Funktion, die die Differenzengleichung auswertet:

```
function [x, t] = DiskreteLoesung(Parameter, omega, N, T0)
```

Parameter:

- N = Anzahl Rechenschritte
- T_0 = Schrittweite

Hinweis: Verwenden Sie die Ergebnisse der Hausaufgabe.

Geben Sie hier Ihren Code an, der die Differenzengleichung auswertet:

```
% Hinweis für Hiwis: x(k), k=0,1,2... in Differenzen-  
% gleichung entspricht in MATLAB x(k*), k*=1,2,3,...  
  
% Funktion zur Berechnung Differenzengleichung %  
  
function [x, t] = DiskreteLoesung(Parameter, omega, N, T0)  
  
    k = Parameter(1); d = Parameter(2);  
    m = Parameter(3); F = Parameter(4);  
  
    C1 = (2 * m + d * T0) / (m + d * T0 + k * T0^2);  
    C2 = -m / (m + d * T0 + k * T0^2);  
    C3 = (m * T0^2) / (m + d * T0 + k * T0^2);  
  
    t = zeros(N, 1);  
    x = zeros(N, 1);  
  
    t(1) = 0;  
    t(2) = T0;  
    x(1) = 0;  
    x(2) = F / m * C3;  
  
    for cnt=3:N  
        t(cnt) = (cnt-1) * T0;  
        x(cnt) = C1 * x(cnt-1) + C2 * x(cnt-2) + ...  
                F / m * C3 * cos(omega * cnt * T0);  
    end  
end
```

Vergleich der Berechnungen

6. Nutzen Sie das folgende Skript zur Auswertung Ihrer Berechnungen. Vergleichen Sie die Ergebnisse. Zoomen Sie hierzu in den Plot. Erhöhen Sie Anzahl der Messpunkte für die diskrete Berechnung und führen Sie den Plot erneut aus. Beachten Sie, dass Sie die Abtastzeit T_0 entsprechend anpassen.

Hinweis: Skript steht zum Download bereit.

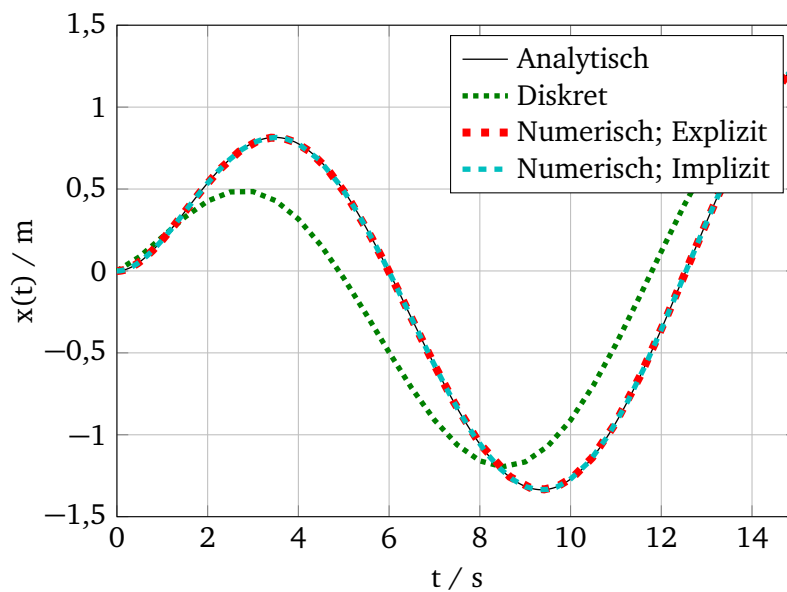
- ```
1 %% Definition der Konstanten
Variablen; Partialbruchzerlegung;
%% Analytische Lösung (Teil I) %%
T = 15; % max. Zeit
[x_ana_1, t_ana_1] = AnalytischeLoesung(Parameter, omega, T(1), P1, →
 ←P2);
6 %% Numerische Lösung (Teil II) %%
x0 = [0, 0].'; T = 15; % Anfangsbedingungen; max. Zeit
[x_num_11, t_num_11] = NumerischeLoesung(T, x0, 1);
[x_num_21, t_num_21] = NumerischeLoesung(T, x0, 2);
```



```

%% Diskrete Lösung (Teil III) %%
11 N = 30; T0 = 0.5; % 30 Schritte; Definition der Schrittweiten
[x_dis_1, t_dis_1] = DiskreteLoesung(Parameter, omega, N, T0);
%% Plotten der Ergebnisse %%
figure();
plot(t_ana_1, x_ana_1, t_dis_1, x_dis_1, 'k', ...
16 t_num_11, x_num_11, '-r', t_num_21, x_num_21, '-.g')
legend('Analytisch', 'Diskret', ...
 'Numerisch; Explizit', 'Numerisch; Implizit');
xlabel('t / s'); ylabel('x(t) / m');
grid on

```



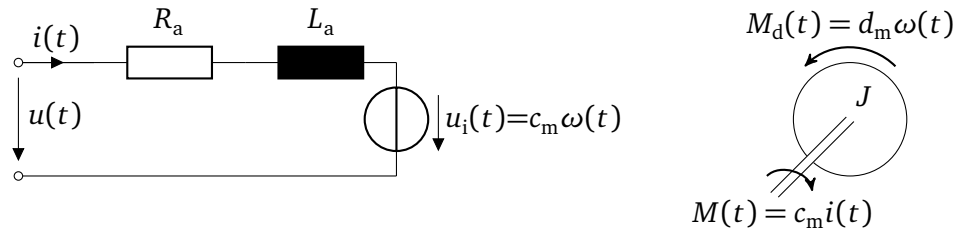
**Abbildung 3.1:** Vergleich

Wie verändert sich die diskrete Lösung bei größerem  $N$  und entsprechend kleinerem  $T_0$ ?

- Die Lösung nähert sich der analytischen Lösung.

### 3.2 Gleichstrommotor

Gegeben ist ein Gleichstrommotor mit einer Schwungscheibe als Last. Das System kann durch folgendes Ersatzschaltbild dargestellt werden:



Die Parameterwerte sind  $J = 10,5 \text{ kg m}^2$ ,  $L_a = 100 \text{ mH}$ ,  $R_a = 100 \Omega$ ,  $c_m = 0,5 \frac{\text{Vs}}{\text{rad}}$ ,  $d_m = 0,5 \text{ Nm} \cdot \text{s/rad}$ . Das dynamische Verhalten des Systems lässt sich durch folgendes Differentialgleichungssystem erster Ordnung beschreiben.

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \omega(t) \\ i(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{d_m}{J} & \frac{c_m}{J} \\ -\frac{c_m}{L_a} & -\frac{R_a}{L_a} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \omega(t) \\ i(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix} \cdot u(t)$$
$$\Downarrow$$
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{b} \cdot u(t)$$

Es wird folgende elektrische Spannung angelegt:

$$u(t) = \begin{cases} 10 \text{ V} & 0 \leq t \leq t_0, \\ 20 \text{ V} & t_0 < t \leq t_1 \\ 0 \text{ V} & t > t_1 \end{cases}$$

#### Hausaufgaben

1. Das System befindet sich zum Zeitpunkt  $t = t_0$  im stationären Zustand. Berechnen sich die Werte  $i(t)$  und  $\omega(t)$  im Zeitpunkt  $t_0$ .

$$\dot{\mathbf{x}}_{\text{st}} = \mathbf{Ax}_{\text{st}} + \mathbf{b}u_{\text{st}} \equiv 0$$

$$\mathbf{x}_{\text{st}} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}u_{\text{st}}$$

mit  $u_{\text{st}} = 10 \text{ V}$  folgt somit:

$$\mathbf{x}_{\text{st}} = \begin{bmatrix} 0,0995 \\ 0,0995 \end{bmatrix}$$

## Versuchsdurchführung

1. Schreiben Sie ein Skript, welches den Verlauf von  $i(t)$  und  $\omega(t)$  für  $t = t_0, \dots, t_0 + 40$  s berechnet (Sie können davon ausgehen, dass  $t_1 - t_0 > 40$  s). Verwenden Sie hierfür die Solver ode15s und ode113 und schreiben die Ergebnisse in die Matrizen  $[t\_im, x\_im]$  bzw.  $[t\_ex, x\_ex]$ .

*Hinweis:* Nehmen Sie Zeittransformation  $t^* = t - t_0$  vor, so dass Ihre Zeitlösung für  $t^* = 0, \dots, 40$  s berechnet wird, da  $t_0$  unbekannt ist. Verwenden Sie die Ergebnisse aus der Hausaufgabe.

Schreiben Sie zum Erzeugen des DGL-Systems zunächst die Funktion:

```
function dx = DGL_System_Aufgabe2(t, x)
```

Geben Sie hier Ihren Code der Funktion an:

```
function dx = DGL_System_Aufgabe2(t, x)

% x = [w,i], dx = [dw,di], t=zeit
% Definition Konstanten
La = 100e-3;
Ra = 100;
cm = 0.5;
J = 10.5;
dm = 0.5;

dx = [-dm/J, cm/J; -cm/La, -Ra/La] * x + [0; 1/La] * 20;
end
```

Geben Sie hier Ihr Skript an:

```
% Berechnung omega(t*) und i(t*) für t*=0,...,40s
x_st = [0,0995; 0,0995];

T = 40;

% Impliziter Solver
[t_im, x_im] = ode15s('DGL_System_Aufgabe2', [0, T], x_st)

% Expliziter Solver
[t_ex, x_ex] = ode113('DGL_System_Aufgabe2', [0, T], x_st)
```

Sie wollen den Verlauf von  $i(t)$  und  $\omega(t)$  für  $t = t_1, \dots, t_1 + 40$  s ebenfalls berechnen.

2. Welche Annahmen müssen Sie treffen, um analog zur Berechnung des Zeitintervalls  $t = t_0, \dots, t_0 + 40$  s die Systemantwort zu berechnen?

Zur Berechnung muss der Anfangswert, d.h. der Systemzustand bei  $t = t_1$  bekannt sein. Dieser kann durch die Simulation bis zum Zeitpunkt  $t_1$  gewonnen werden. Wird die Annahme getroffen, dass das System bis  $t = t_1$  wieder einen stationären Zustand erreicht hat, kann der Anfangszustand  $\mathbf{x}_{st}$  mit  $u_{st} = 20V$  analog wie für  $t_0$  berechnet werden.

3. Welche Änderungen müssen Sie in ihrer Funktion vornehmen? Was unterscheidet den Typ der DGL aus 1. mit dem Typ hier?

Die Eingangsgröße entfällt ( $\mathbf{b} \cdot 0$ ).  
Die DGL ist homogen, die DGL aus 1. ist inhomogen.

4. Was müssen Sie bei der Ausführung des Skripts beachten? Was hat sich im Vergleich zur DGL aus 1. geändert?

Die Startwerte  $\mathbf{x}_{st}$  müssen neu berechnet werden.

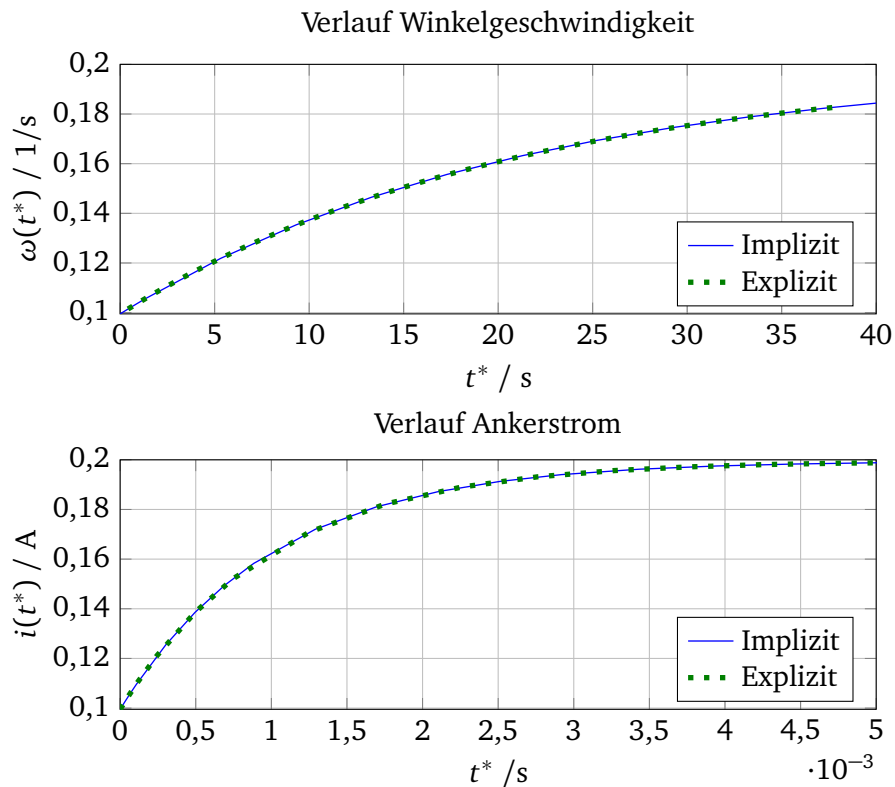
Das folgende Skript plottet den Ankerstrom und die Winkelgeschwindigkeit der ersten DGL, wie in Abbildung 3.2 dargestellt.

*Hinweis:* Skript steht zum Download bereit.

```
%Simulationszeit
T =
figure
subplot(2, 1, 1)
5 plot(t_im, x_im(:,1), t_ex, x_ex(:,1), '-.')
 legend('Implizit', 'Explizit')
 axis([0, T, x_st(1), 0.2])
 xlabel('t*_/s')
 ylabel('\omega(t*)_/1/s')
10 title('Verlauf_Winkelgeschwindigkeit')
 grid on
 xlabel('t*_/s')
 subplot(2,1,2)
 plot(t_im, x_im(:,2), t_ex, x_ex(:,2), '-.')
15 legend('Implizit', 'Explizit')
 axis([0, 0.005, x_st(2), 0.2])
 grid on
 xlabel('t*_/s')
 ylabel('i(t*)_/A')
20 title('Verlauf_Ankerstrom')
 grid on
```

Es ist erkennbar, dass beide Solvertypen nahezu identische Ergebnisse liefern.

5. Vergleichen Sie mit dem Befehl `length` die Ausgabe (`x_im`, `x_ex`) beider Solver. Was fällt Ihnen auf?



**Abbildung 3.2:** Ankerstrom und Winkelgeschwindigkeit

Der implizite Solver ode15s liefert deutlich weniger Ausgabewerte als der explizite Solver ode113. D.h. der implizite Solver hat deutlich weniger Rechenschritte benötigt.

6. Geben Sie die Eigenwerte des Systems an und begründen Sie, warum ode15s gegenüber ode113 vorzuziehen ist.

Die Eigenwerte sind  $\lambda_1 \approx -0,04786$  (mechanischer EW) und  $\lambda_2 \approx -1000$  (elektrischer EW), d.h. es handelt sich hierbei um ein steifes DGL-System. Für steife DGL-Systeme sollten immer implizite Verfahren, hier ode15s, verwendet werden!



---

# Musterlösung Versuch 4

---

## 4.1 Analyse des Systemverhaltens der Strecke

---

---

### Hausaufgabe

---

1. Ist das System Ventilator stabil?

Da beide Pole des Systems in der linken s-Halbebene liegen, ist das System stabil.

2. Berechnen Sie die stationäre Verstärkung  $k_{\text{stat}}$  aus der Übertragungsfunktion des Ventilators.

Die stationäre Verstärkung des Ventilators erhält man, wenn man die Übertragungsfunktion für  $s = 0$  auswertet. Man erhält damit

$$k_{\text{stat}} = \frac{0,006213}{4,71 \cdot 10^{-5}} = 131,91$$

3. Finden Sie den Befehl zum Zeichnen der Impulsantwort.

**Befehl:** `impulse(sys)`

4. Finden Sie den Befehl zum Zeichnen der Ortskurve.

**Befehl:** `nyquist(sys)`

5. Finden Sie den Befehl zum Zeichnen der Reaktion einer Strecke auf ein beliebiges Eingangssignal.

**Befehl:** `lsim(sys, u, t)`

---

### Versuchsdurchführung

---

1. Speichern Sie die Übertragungsfunktion des Ventilators in die Variable `sys` (MATLAB-Befehl angeben).

*Hinweis:* Sie werden die Übertragungsfunktion `sys` im Laufe des Versuchs wiederholt benötigen. Speichern Sie bitte Zwischenergebnisse / Regler, da diese in aufbauenden Aufgaben / Versuchen noch verwendet werden. Runden Sie diese auch bitte nicht, dadurch verlieren die Folgeberechnungen an Genauigkeit, was zu fehlerhaften Verhalten der Regelstrecke führen kann.

```
sys = tf([0.006213], [8.989e-10, 2.786e-5, 4.71e-5])
```

2. Bestimmen Sie mit Hilfe von MATLAB die Pole der Strecke (Ventilator).

**Befehl:** pole(sys)

$$s_1 \approx -3,1 \cdot 10^4$$

$$s_2 \approx -1,69$$

Wahrscheinlich zeigt MATLAB zunächst nicht die  $-1,69$  sondern nur eine  $-2$  an. Dies liegt daran, dass MATLAB standardmäßig nur vier Nachkommastellen anzeigt, und bei Vektoren ein einzelner gemeinsamer Faktor herausgezogen wird. Da der erste Pol bei  $-3,1 \cdot 10^4$  deutlich größer als der zweite Pol ist, wird bei dem zweiten Pol hier nur eine signifikante Stelle angezeigt.

Dies könnte man mit dem Befehl `format long` ändern. Dann zeigt MATLAB fünfzehn Nachkommastellen und man erhält die obigen Werte.

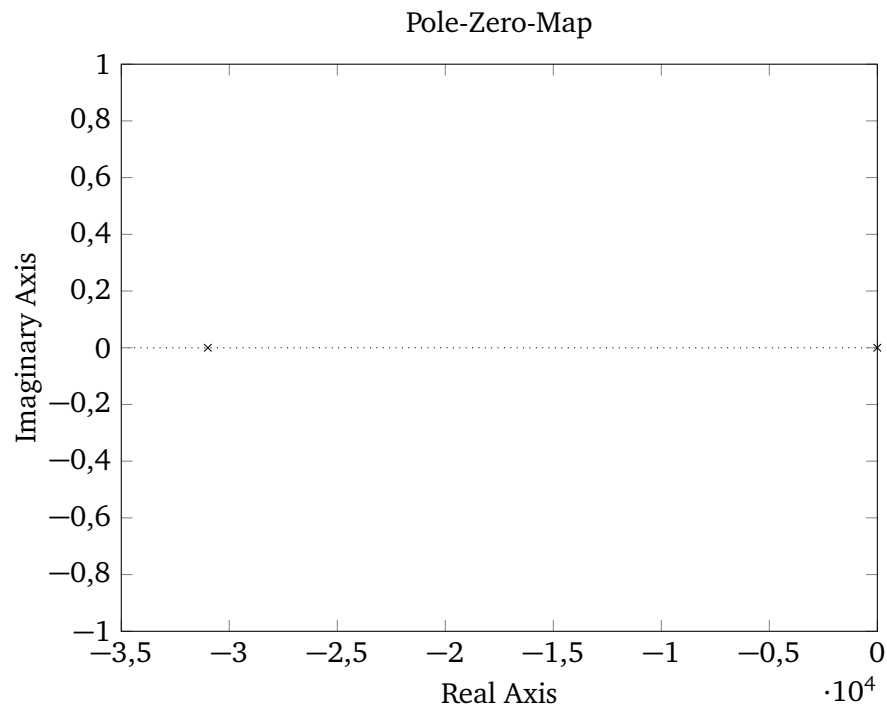
Alternativ kann man sich die Werte zunächst in einen Vektor schreiben und sich dann den zweiten Pol alleine anzeigen lassen:

```
p = pole(sys);
p(2)
```

3. Lassen Sie sich die Nullstellen und Pole in der komplexen Ebene zeichnen.

**Befehl:** pzmap(sys)

Die Nullstellen sind durch Kreise und die Pole durch Kreuze gekennzeichnet.



4. Bestimmen Sie die stationäre Verstärkung der Strecke.



---

**Befehl:** `dcgain(sys)`

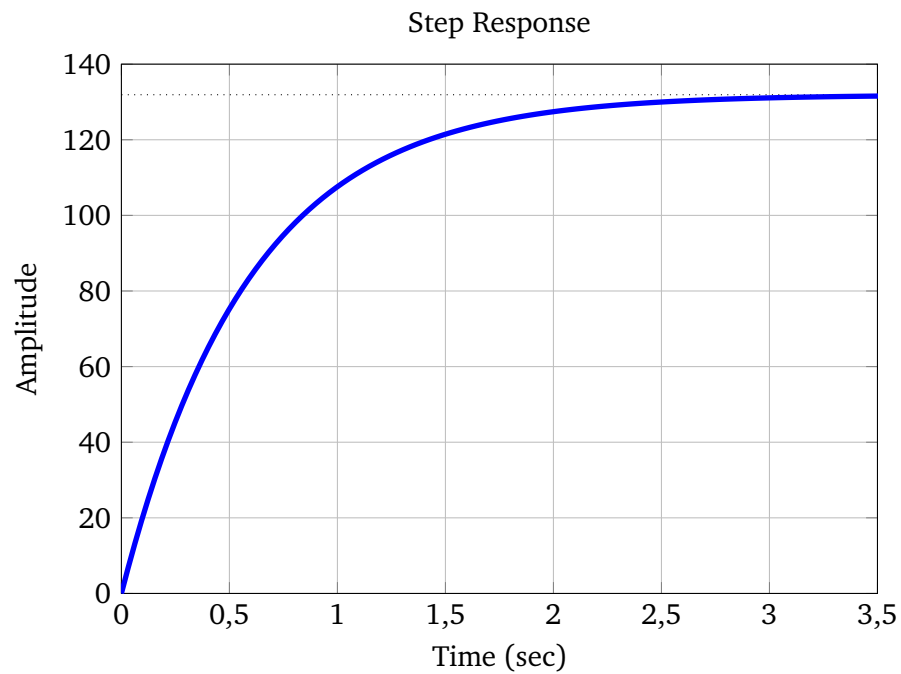
$$k_{\text{stat}} = 1,319 \cdot 10^2 \approx 132$$

5. Lassen Sie die Sprung- und Impulsantwort der Strecke (Ventilator) zeichnen.  
*Hinweis:* In den folgenden Aufgaben benötigen Sie die Befehle aus der Hausaufgabe.

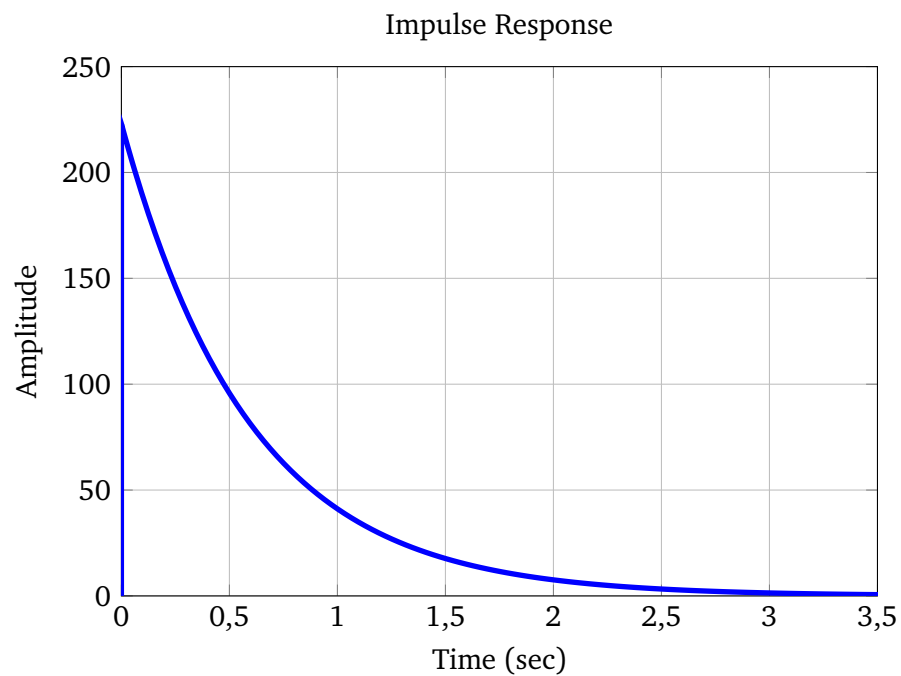
**Befehle:** `step(sys)` und `impulse(sys)`

*Hinweis:* Der Befehl `impulse` sollte selbstständig z. B. über `help step` gefunden werden.

Sprungantwort:



Impulsantwort:



6. Bestimmen Sie die Werte für  $\Delta h$ ,  $t_\varepsilon$  und  $t_{\text{an}}$  für  $\varepsilon = 5\%$ .

Bei der Bestimmung von  $t_\varepsilon$  und  $t_{\text{an}}$  muss soweit in die Sprungantwort hineingezoomt werden, dass man den Grenzwert von 95% ablesen kann. Dieser liegt bei einer Amplitude von ca. 125,4. Da die Sprungantwort sofort im 5%-Schlauch bleibt sind die Werte für  $t_\varepsilon$  und  $t_{\text{an}}$  gleich. Da die Strecke keine konjugiert komplexen Pole hat, kommt es nicht zu einer Schwingung.

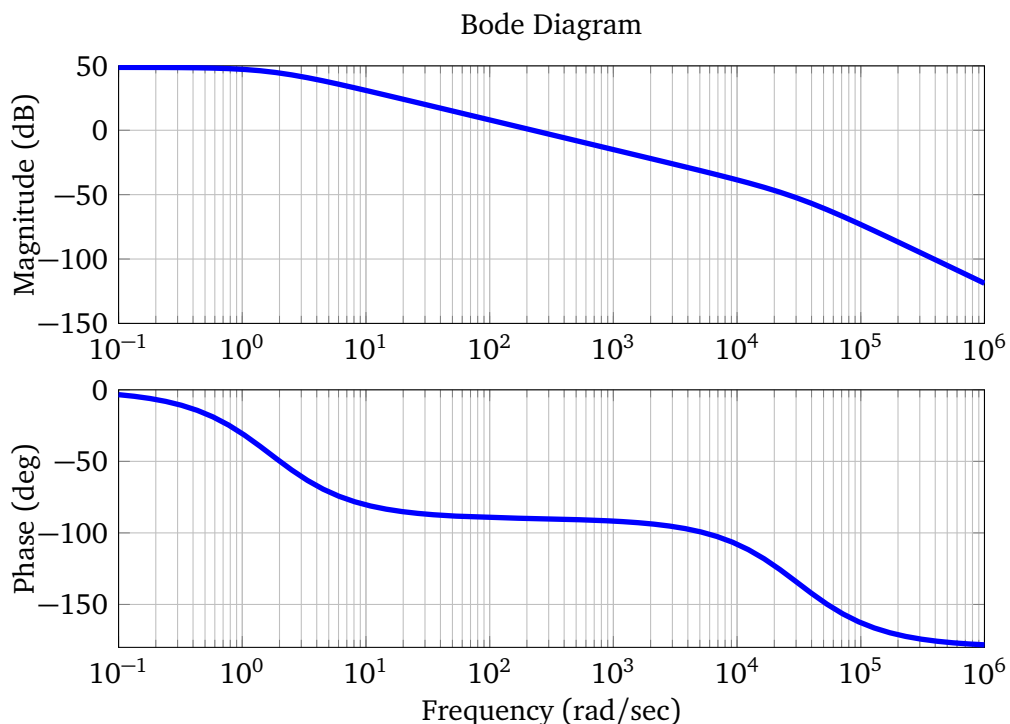
$$\begin{aligned}\Delta h &= 0, \\ t_\varepsilon &\approx 1,78 \text{ s}, \\ t_{\text{an}} &\approx 1,78 \text{ s}.\end{aligned}$$

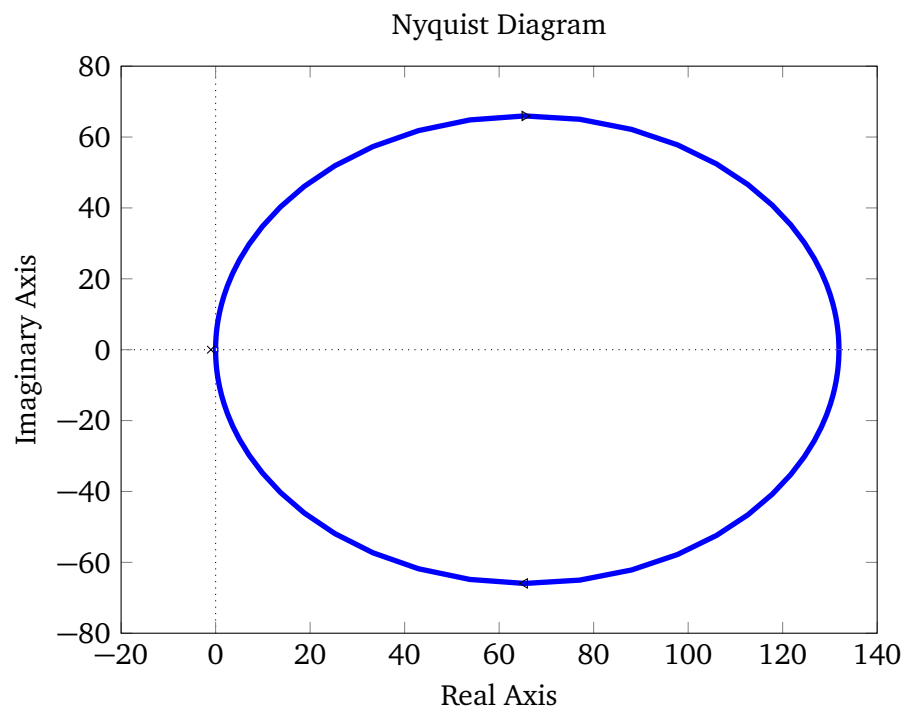
7. Zeichnen Sie das Bode-Diagramm und die Ortskurve der Strecke (Ventilator) und geben Sie die Durchtrittsfrequenz  $\omega_D$  sowie den Amplitudenrand  $A_{\text{rd}}$  und Phasenrand  $\varphi_R$  an.

**Befehl:** `bode(sys)`, `margin(sys)` und `nyquist(sys)`

*Hinweis:* Der Befehl `nyquist` sollte selbstständig über den Befehl `help bode` gefunden werden.

Es ergibt sich das typische Bode-Diagramm eines  $PT_2$ -Gliedes mit reellen unterschiedlichen Polen.



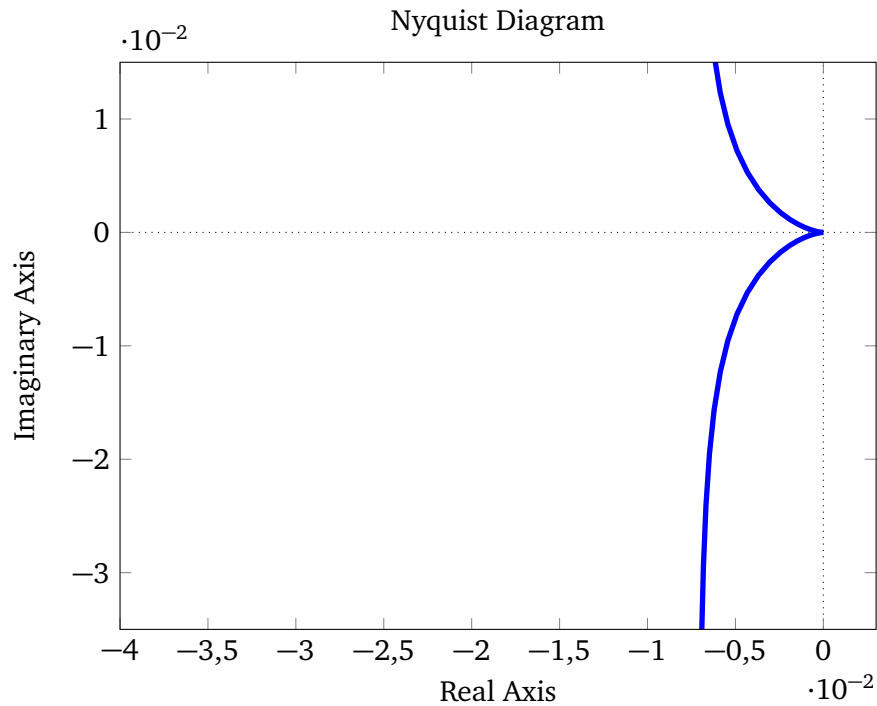


$$\omega_D = 223 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$\varphi_R = 90^\circ$$

$$A_{\text{rd}} = \infty \text{ dB}$$

Bei der Ortskurve ist zu beachten, dass es sich bei dem betrachteten System um ein  $PT_2$ -Glied handelt. Dadurch müsste die Ortskurve für  $\omega > 0$  durch zwei Quadranten gehen. Da aber einer der Pole betragsmäßig stark überwiegt, geht die Ortskurve scheinbar nur durch einen Quadranten. Wenn man jedoch den Bereich an der imaginären Achse etwas heranzoomt, erkennt man in der vergrößerten Darstellung, dass die Ortskurve doch durch zwei Quadranten verläuft.



8. Lassen Sie die Reaktion der Strecke (Ventilator) auf ein Sinussignal, mit Amplitude  $A = 1$  und einer Frequenz von  $\omega \approx 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ , für eine Dauer von 10 Sekunden zeichnen.

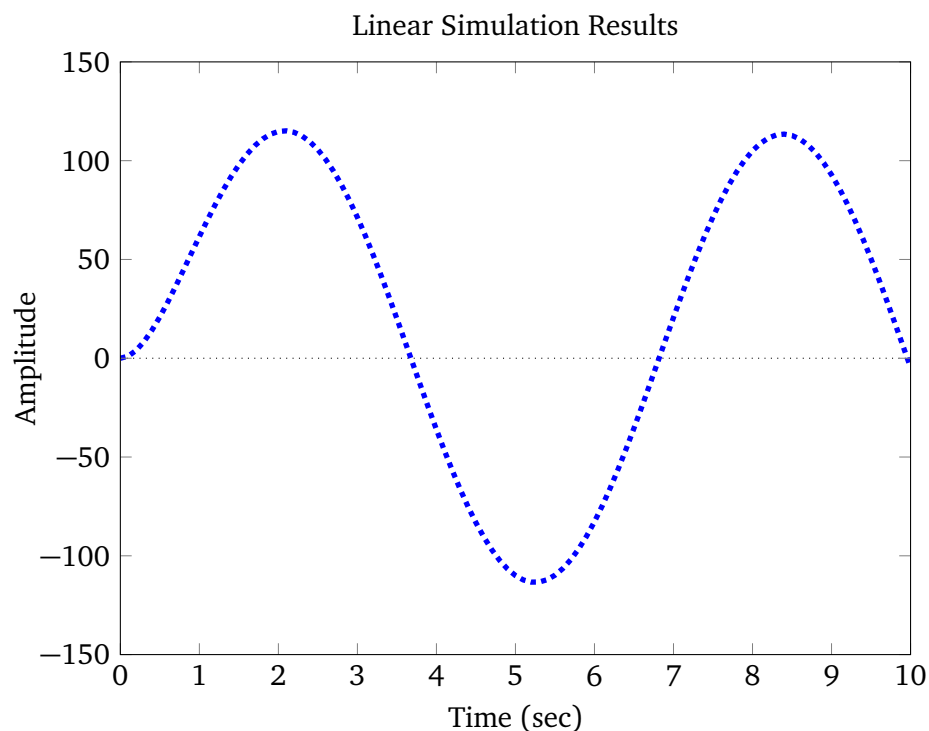
Es gilt  $\omega = 1$ , so dass einfach  $u = \sin(t)$  eingegeben werden kann.

**Befehle:**

```
t = (0:0.1:10).';
u = sin(t);
lsim(sys, u, t)
```

*Hinweis:* Der Befehl `lsim` sollte selbstständig gefunden werden.

Das Ausgangssignal zeigt den Einschwingvorgang bei Sinus-Anregung. Offensichtlich hat das Signal für  $t \rightarrow \infty$  die gleiche Frequenz wie das Eingangssignal und eine Verstärkung von ungefähr 120.



9. Verändern Sie die Verstärkung der Strecke und führen Sie die Punkte (5) und (7) erneut aus. Was beobachten Sie als Veränderung von Sprungantwort, Bodediagramm und Ortskurve?

Eine Veränderung der Verstärkung ergibt in der Sprung- und Impulsantwort lediglich eine andere Skalierung der Achsen. Der ursprüngliche Verlauf bleibt erhalten. Durch die Veränderung der Verstärkung ergeben sich im Bodediagramm eine Absenkung oder Anhebung des Betragsverlaufs, jedoch keine Änderung im Phasenverlauf. In der Ortskurve bewirkt eine Veränderung der Verstärkung eine Vergrößerung oder Verkleinerung des Abstands zum Ursprung.

10. Verschieben Sie die Pole der Strecke und führen Sie die Punkte (5) und (7) erneut aus. Was fällt Ihnen in der Veränderung der Sprungantwort und der Veränderung im Verlauf des Bode-Diagramms auf, wenn Sie die Pole weiter links oder weiter rechts platzieren?

Eine Verschiebung der Pole bewirkt ein schnelleres oder langsames Ansprechen der Strecke auf ein Eingangssignal.  
Im Bode-Diagramm verändern sich die Knickfrequenzen. Der grundsätzliche Verlauf (Abfall der Phasenkennlinie von  $0^\circ$  auf  $-180^\circ$  und  $-40 \frac{\text{dB}}{\text{Dek}}$  Abfall des Betrags für große  $\omega$ ) bleibt erhalten.

## 4.2 Reglerentwurf mit dem Frequenzkennlinienverfahren

### 4.2.1 Entwurf eines P-Reglers

Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion eines P-Reglers, welcher im geschlossenen Regelkreis mit der Strecke (Ventilator) eine maximale Überschwingweite von  $\Delta h = 0,3$  erzeugt. Nutzen Sie dafür die Ergebnisse Ihrer Hausaufgabe.

### Hausaufgaben

Es soll ein Regler mit einer maximalen Überschwingweite von  $\Delta h = 0,3$  erzeugt werden.

1. Bestimmen Sie zunächst die nötige Dämpfung  $d$ .

Es ergibt sich eine Dämpfung von  $d \geq 0,3578$ .

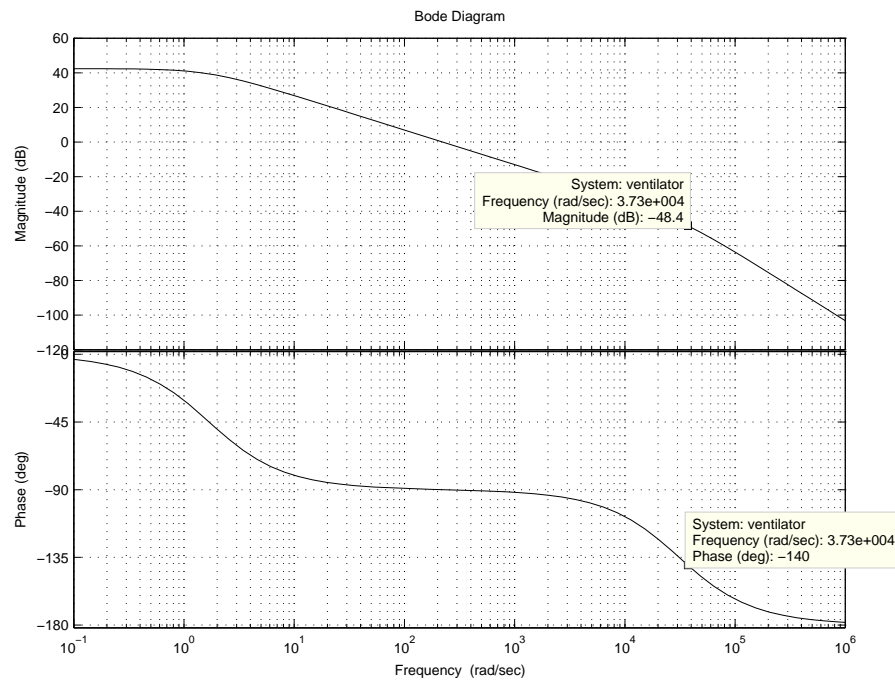
2. Bestimmen Sie die dafür notwendige Phasenreserve  $\varphi_R$ .

Es ergibt sich eine Phasenreserve von  $\varphi_R \approx 39,25^\circ$ .

- Bestimmen Sie die Durchtrittsfrequenz  $\omega_D$ .

**Befehl:** bode(sys)

Die Durchtrittsfrequenz kann aus dem Bodediagramm des offenen Regelkreises abgelesen werden.



$$\omega_D = 37300 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

- Bestimmen Sie die Absenkung / Anhebung durch den Regler (**nicht in dB!**).

Die benötigte Anhebung kann ebenfalls im Bodediagramm des offenen Kreises abgelesen werden: 48,4 dB.

$$48,4 \text{ dB} = 20 \cdot \lg(K_R) \Rightarrow K_R = 10^{\frac{48,4}{20}} \Rightarrow K_R = 263,0268$$

- Geben Sie die Übertragungsfunktion des Reglers  $G_R(s)$  an.  
*Hinweis:* Speichern Sie die Übertragungsfunktion in die Variable „regler\_P“.

**Befehl:** regler\_P = 263.0268

$$G_{R,P}(s) = 263,0268$$



4. Bestimmen Sie die Pole des geschlossenen Regelkreises.

*Hinweis:* Der geschlossene Regelkreis setzt sich aus dem Regler und der Strecke zusammen.

**Übertragungsfunktion des geschlossenen Regelkreises:**

```
sys_ges = feedback(sys * regler_P, 1);
```

**Berechnung der Pole:**

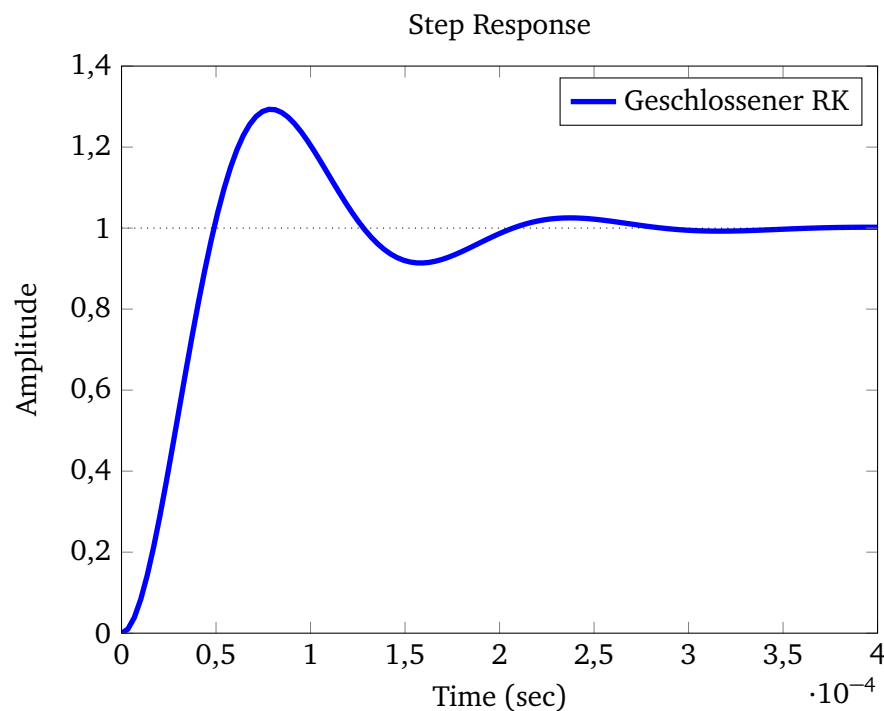
```
pole(sys_ges)
```

$$s_1 \approx 10^4 \cdot (-1,5497 + 3,9723j)$$

$$s_2 \approx 10^4 \cdot (-1,5497 - 3,9723j)$$

5. Testen Sie den Regler, indem Sie sich die Reaktion des geschlossenen Regelkreises auf einen Einheitsprung plotten lassen.

**Befehl:** `step(sys_ges)`



Entspricht das Ergebnis in Bezug auf stationäre Genauigkeit und Überschwingung Ihren Erwartungen?

Obwohl weder Strecke noch Regler einen I-Anteil haben, erscheint der geschlossene Regelkreis stationär genau. Das war vorher nicht zu erwarten. Die Anforderungen bzgl. des maximalen Überschwingens wurden erfüllt.

6. Variieren Sie die soeben gefundene Übertragungsfunktion des Reglers und führen Sie die Schritte (5) und (4) erneut durch. Was fällt Ihnen in Bezug auf stationäre Genauigkeit und Überschwingung auf?

*Hinweis:* Versuchen Sie auch sehr kleine  $K_R$ , z. B.  $0 \leq K_R \leq 0,5$ .

Ein Senken der Verstärkung führt zur Minderung des Überschwingens und der geschlossene Regelkreis ist nicht mehr (quasi) stationär genau. (Bei hohen Verstärkungen ist der Regelkreis auch nicht exakt stationär genau, aufgrund der hohen stationären Verstärkung des offenen Regelkreises ergibt sich aber eine stationäre Verstärkung des geschlossenen Regelkreises, die sehr nahe an eins liegt.)

Eine Erhöhung führt zur Zunahme des Überschwingens.

Der gefundene Regler ist also ziemlich gut.

Auf die Angabe der Pole wird hier verzichtet, da sie abhängig von der neu gewählten Verstärkung des Reglers sind.

7. Vergleichen Sie die Ergebnisse mit denen der unregelten Strecke.

Die geregelte Strecke ist wesentlich schneller als die unregelte (Pole weiter links in der s-Ebene).

Die geregelte Strecke hat im Vergleich zur unregelten Strecke konjugiert komplexe Pole und ist somit schwingungsfähig.

Durch eine hohe Reglerverstärkung kann im geschlossenen Regelkreis näherungsweise stationäre Genauigkeit erreicht werden.

8. Welche Aussage können Sie über die stationäre Genauigkeit des über den P-Regler geschlossenen Regelkreises treffen. Wie kann die Genauigkeit mit einem P-Regler verbessert werden?

Mit einem P-Regler kann zunächst keine stationäre Genauigkeit garantiert werden. Die Erhöhung des Verstärkungsfaktors führt aber näherungsweise zu stationärer Genauigkeit.

#### 4.2.2 Entwurf eines PI-Reglers

Bestimmen Sie die Übertragungsfunktion eines PI-Reglers, welcher im geschlossenen Regelkreis mit der Strecke (Ventilator) eine maximale Überschwingweite von  $\Delta h = 0,3$  erzeugt. Nutzen Sie dafür die Ergebnisse Ihrer Hausaufgabe.

#### Hausaufgaben

Es soll ein Regler mit einer maximalen Überschwingweite von  $\Delta h = 0,3$  erzeugt werden.

1. Bestimmen Sie zunächst die nötige Dämpfung  $d$ .

Es ergibt sich eine Dämpfung von  $d \geq 0,3578$ .

2. Bestimmen Sie die dafür notwendige Phasenreserve  $\varphi_R$ .

Es ergibt sich eine Phasenreserve von  $\varphi_R \approx 39,25^\circ$ .

## Versuchsdurchführung

1. Geben Sie die Zeitkonstante  $T_R$  des Reglers an (siehe Aufgabe 4.1.2).

*Hinweis:* Speichern Sie die Übertragungsfunktion in die Variable „regler\_PI\_1“.

Da der betragsmäßig kleinste Pol bei  $s_2 \approx -1,69$  liegt, muss für die Zeitkonstante der Wert

$$T_R = \frac{1}{1,69} = 0,5917$$

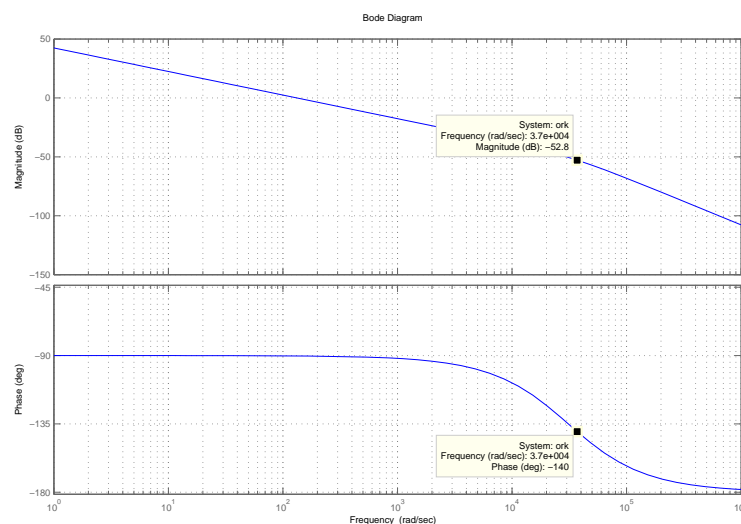
gewählt werden.

**Befehl:** `regler_PI_1 = tf([0.5917, 1], [1, 0])`

2. Bestimmen Sie die Durchtrittsfrequenz  $\omega_D$ .

**Befehl:** `bode(sys*regler)`

Die Durchtrittsfrequenz kann aus dem Bodediagramm abgelesen werden.



$$\omega_D \approx 37000 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

3. Bestimmen Sie die Absenkung / Anhebung durch den Regler (**nicht in dB!**).

Wie im Bodediagramm zu erkennen ist, benötigt man eine Anhebung um 52,8 dB.

$$52,8 \text{ dB} = 20 \cdot \lg(K_R) \Rightarrow K_R = 10^{\frac{52,8}{20}} \Rightarrow K_R = 436,516$$

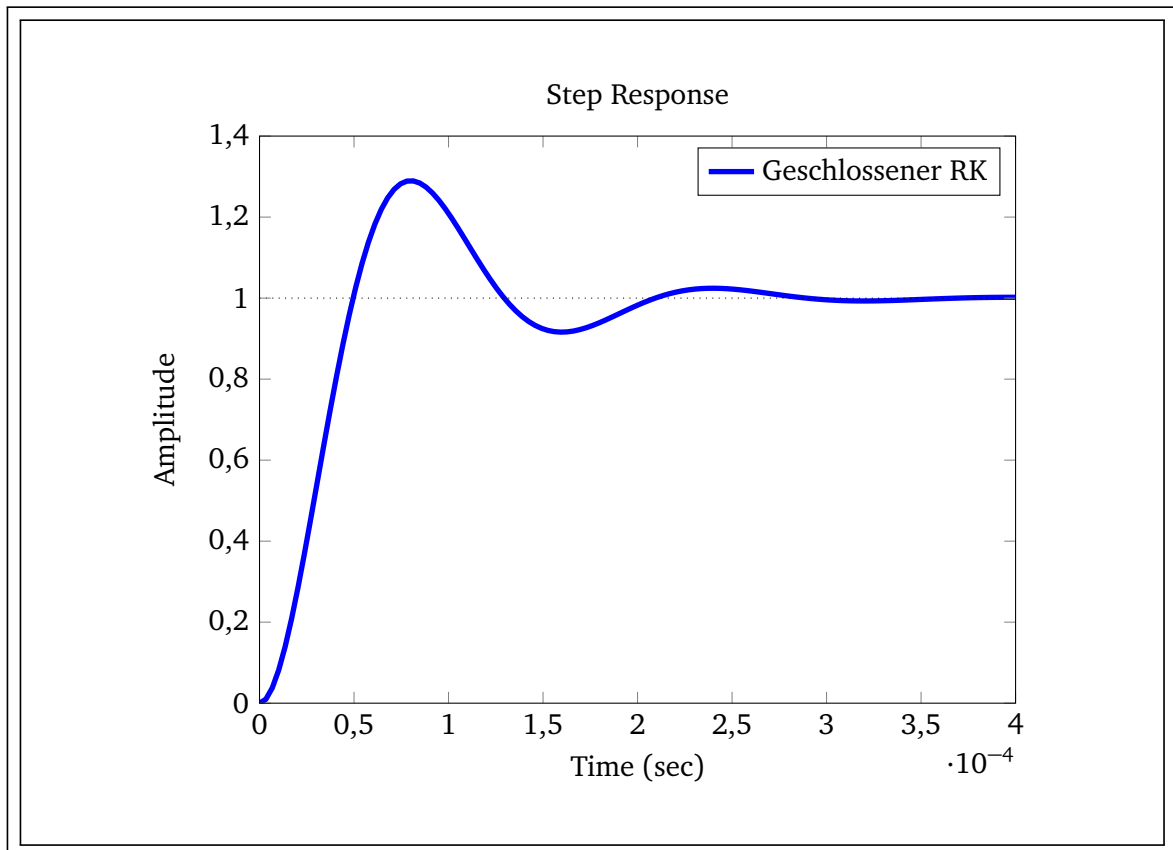
4. Geben Sie die Übertragungsfunktion  $G_{R,PI\_1}(s)$  des Reglers an.

*Hinweis:* Speichern Sie die Übertragungsfunktion in die Variable „regler\_PI\_1“.

$$G_{R,PI\_1}(s) = 436,516 \cdot \frac{0,5917 \cdot s + 1}{s}$$

**Befehl:** `regler_PI_1 = regler_PI_1 * 436.516`

5. Testen Sie den Regler, indem Sie sich die Reaktion des geschlossenen Regelkreises auf einen Einheitssprung plotten lassen.



6. Wo liegen die Pole des geschlossenen Regelkreises? Vergleichen Sie mit den Ergebnissen der Strecke und des P-geregelten Systems.

$$s_{1,2} = (-1,55 \pm 3,93j) \cdot 10^4$$

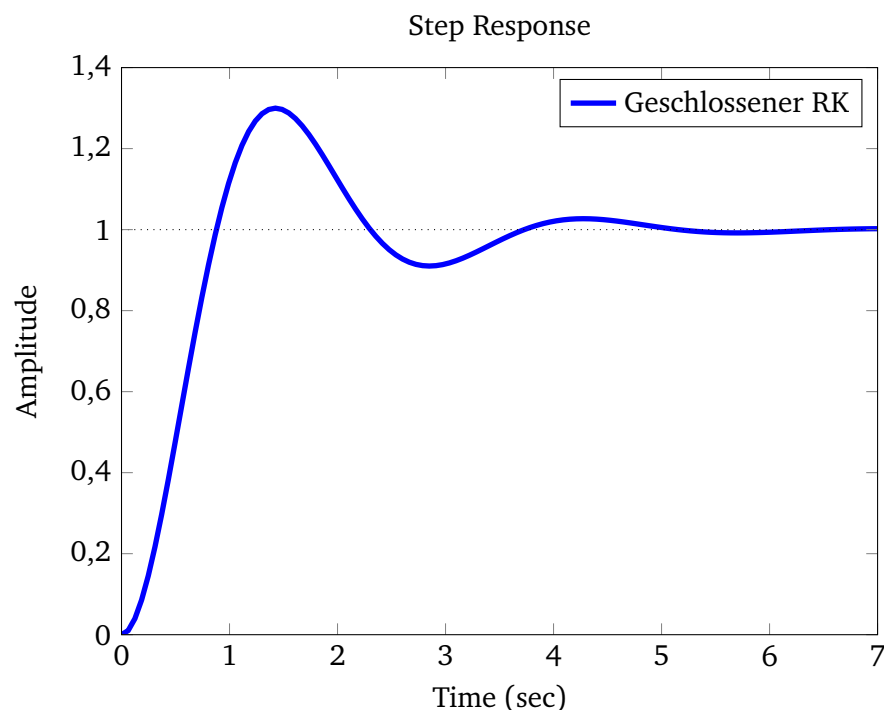
Die Pole liegen etwa so weit links in der s-Ebene wie beim P-geregelten System. Im Vergleich zum offenen Regelkreis liegen die Pole beider geregelten Systeme deutlich weiter links.

*Hinweis:* Evtl. wird bei der Berechnung mit MATLAB der Pol bei  $s = -1,69$  nicht perfekt kompensiert. Dieser taucht dann natürlich auch in der Berechnung der Pole auf, auch wenn er durch eine Nullstelle quasi kompensiert wird.

7. Kompensieren Sie durch den Regler jetzt den anderen Pol (siehe Aufgabe 4.1.2) und führen Sie den Schritt (5) erneut durch. Geben Sie  $T_R$  und  $K_R$  und die neuen Pole an. Vergleichen Sie das Zeitverhalten der Sprungantwort und die Lage der Polstellen mit obigen Ergebnissen.

$$\begin{aligned} T_R &= 3,2266 \cdot 10^{-5} \\ K_R &= 0,025 \\ \Rightarrow G_{R,PI}(s) &= \frac{8,065 \cdot 10^{-7}s + 0,025}{s} \end{aligned}$$

Man erkennt das wesentlich langsamere Ansprechen dieses Regelkreises, was durch die in der s-Ebene weiter rechts liegenden Pole  $s_{1,2} = -0,845 \pm 2,22j$  bestätigt wird.



8. Welche Aussage können Sie über die stationäre Genauigkeit des Regelkreises mittels eines PI-Reglers treffen.

Die Variation der Parameter des Reglers führen zu einer schnelleren bzw. langsameren Systemantwort. Der PI-Regler zeigt immer stationäre Genauigkeit.

#### 4.3 Reglerentwurf und Synthese nach dem Betragsoptimum

Bestimmen Sie einen PI-Regler zur Regelung des Ventilators mittels der Synthese nach Betragsoptimum. Gehen Sie hierbei wie folgt vor:

1. Geben Sie die Parameter  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  und  $a_3$  an.

Die Übertragungsfunktion muss zunächst in die Form

$$G_S(s) = \frac{1}{A(s)}$$

gebracht werden. Die Parameter können dann abgelesen werden.

$$a_0 = 0,007581$$

$$a_1 = 0,004484$$

$$a_2 = 1,447 \cdot 10^{-7}$$

$$a_3 = 0$$

2. Bestimmen Sie anhand der Gleichungen der Synthese nach dem Betragsoptimum die Parameter  $r_0$  und  $r_1$ .

$$r_0 = 234,9$$

$$r_1 = 138,9$$

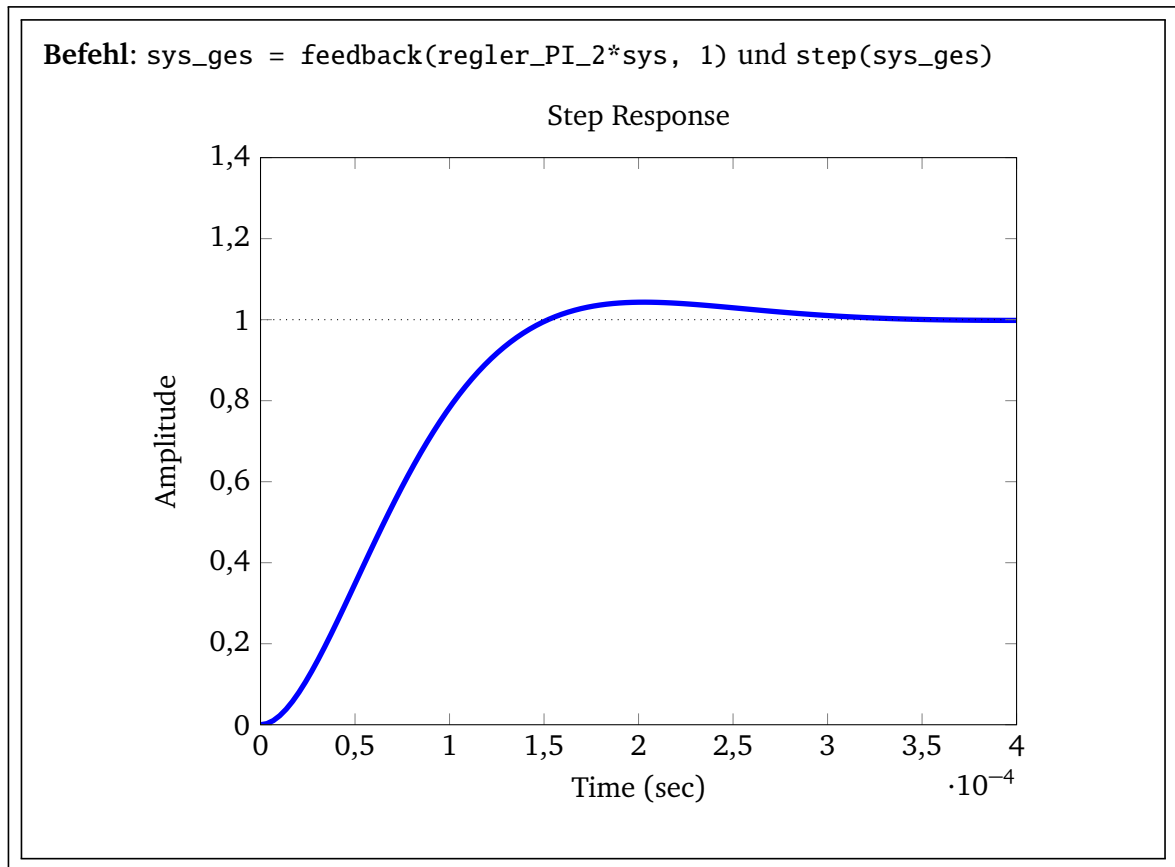
3. Geben Sie die Übertragungsfunktion des PI-Reglers an.

*Hinweis:* Speichern Sie die Übertragungsfunktion in die Variable „regler\_PI\_2“.

$$G_{R,PI\_2}(s) = \frac{138,9s + 234,9}{2s}$$

**Befehl:** `regler_PI_2 = tf([r1, r0], [2, 0])`

4. Testen Sie den Regler, indem Sie die Reaktion des geschlossenen Regelkreises auf einen Einheitssprung plotten lassen.



Variieren Sie die soeben gefundene Übertragungsfunktion des Reglers, indem Sie den Wert  $r_0$  verdoppeln. Geben Sie die Übertragungsfunktion und die Sprungfunktion des geschlossenen Regelkreises an. Vergleichen Sie die Lage der Polstellen.

$$G_{R\_PI}(s) = \frac{138,9s + 469,9}{2s}$$

$$G_{ges}(s) = \frac{0,863s + 2,919}{1,798 \cdot 10^{-9}s^3 + 5,572 \cdot 10^{-5}s^2 + 0,8631s + 2,919}$$

neu :

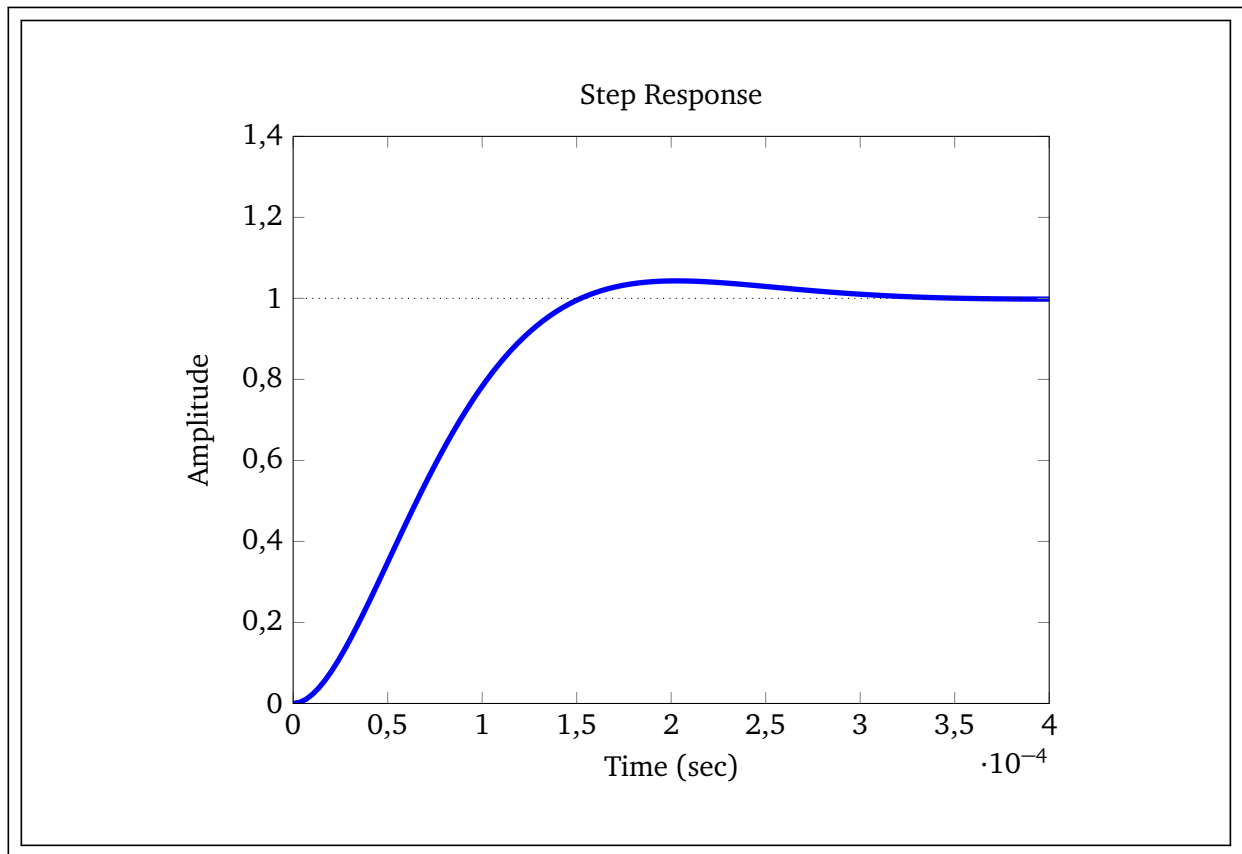
$$s_1 = -1,5495 \pm j1,5488 \cdot 10^4$$

$$s_2 = -0,0003 \cdot 10^4$$

alt :

$$s_1 = -1,5496 \pm j1,5489 \cdot 10^4$$

$$s_2 = -0,0002 \cdot 10^4$$



#### 4.4 Vergleich der Reglerentwurfsverfahren

1. Welche Aussage können Sie hinsichtlich der Dämpfung eines Regelkreises mittels der beiden Verfahren treffen?

Das Frequenzkennlinienverfahren liefert Regelkreise, die vergleichsweise schlecht gedämpft sind.

Es treten bei Anregung mit einem Einheitssprung deutliche Schwingungen auf.

Dafür ist der geschlossene Regelkreis vergleichsweise schnell.

Die Synthese nach Betragsoptimum liefert Regelkreise, die besser gedämpft sind.

Es tritt bei Anregung mit einem Einheitssprung nur ein kleines Überschwingen auf.

Dafür ist der geschlossene Regelkreis langsamer.

2. Welche Aussage können Sie hinsichtlich der Einflussnahme auf die Ergebnisse mittels der beiden Verfahren treffen?

Während man beim Frequenzkennlinienverfahren gut Einfluß auf das Ergebnis nehmen kann, muss man bei der Synthese nach dem Betragsoptimum darauf verzichten. Der Regler wird strikt nach festgelegten Formeln entworfen.

3. Statt eines optimalen Messgliedes soll jetzt ein  $PT_1$ -Glied mit der Zeitkonstanten  $T_t = 0,00001$  s und der stationären Verstärkung  $K = 1$  verwendet werden. Vergleichen Sie die drei entworfenen Regelungen ( $G_{R,P}(s)$ ,  $G_{R,PI\_1}(s)$ ,  $G_{R,PI\_2}(s)$ ) für diesen Fall miteinander. Arbeiten diese besser oder schlechter? Geben Sie jeweils die neuen Überschwingweiten  $\Delta h$  an.

*Hinweis:* Skript steht zum Download bereit.



---

**Befehle:**

```
mess = tf([1], [0.00001, 1])
```

- Frequenzkennlinienverfahren:
  - P-Regler: 1,6
  - PI-Regler: 1,59
- Betragsoptimum:
  - PI-Regler: 1,1

Das Verhalten hat sich verschlechtert.

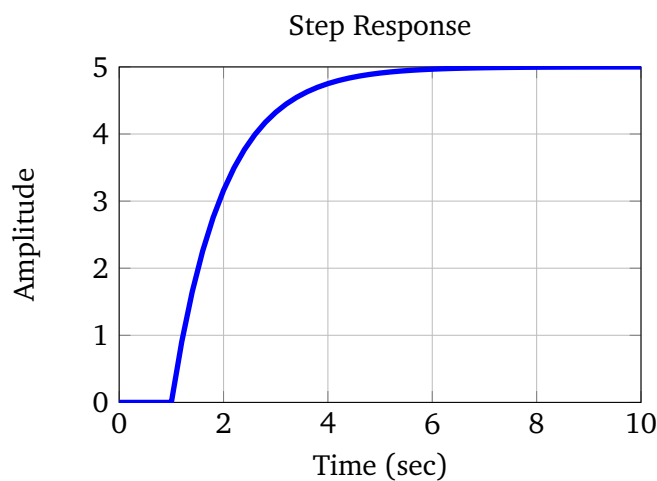


# Musterlösung Versuch 5

## 5.1 Kurzeinführung in MATLAB/Simulink

### Hausaufgabe

1. Der Plot in Abbildung 5.1 enthält die Systemantwort auf einen Einheitssprung bei  $t = 1$  s. Um welchen LZI-Systemtyp handelt es sich?

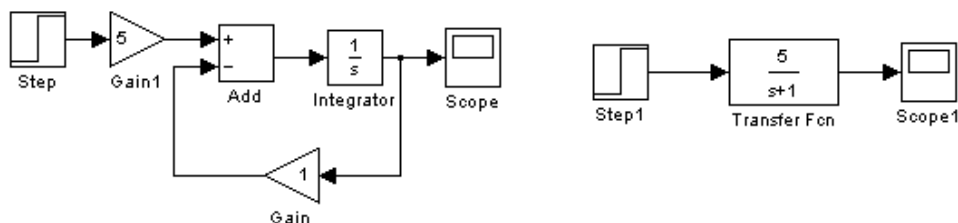


**Abbildung 5.1:** Sprungantwort

Es handelt sich um ein PT1-Glied.

2. Wie kann der Verlauf aus Abbildung 5.1 in Simulink realisiert werden? Zeichnen Sie dazu das Blockschaltbild.

Es gibt zwei Möglichkeiten:

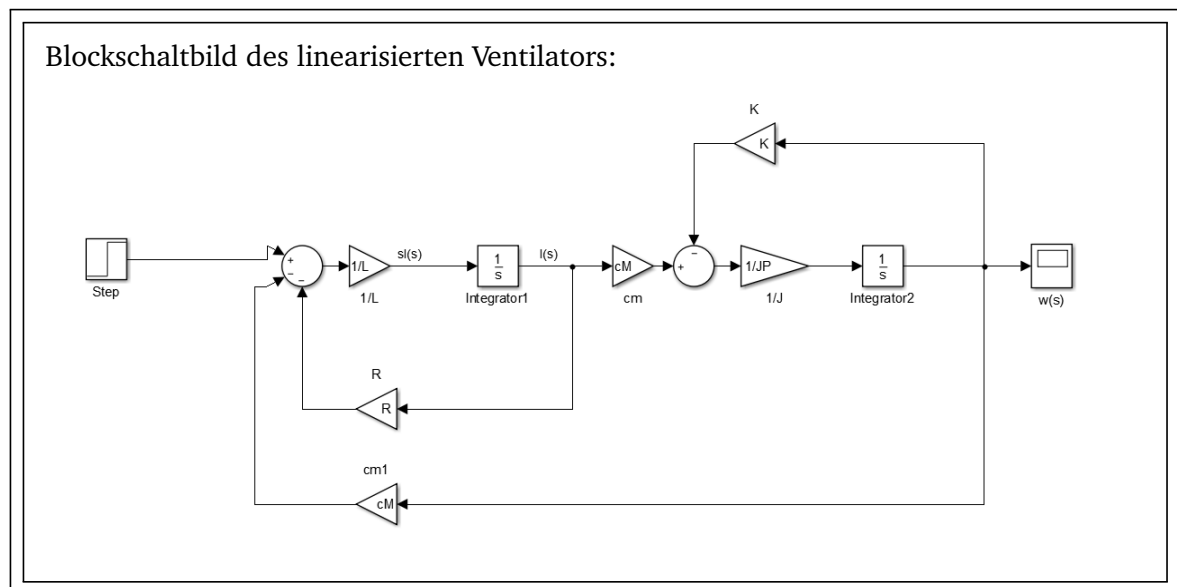


## 5.2 Regelung des Ventilators in Simulink

### Versuchsdurchführung

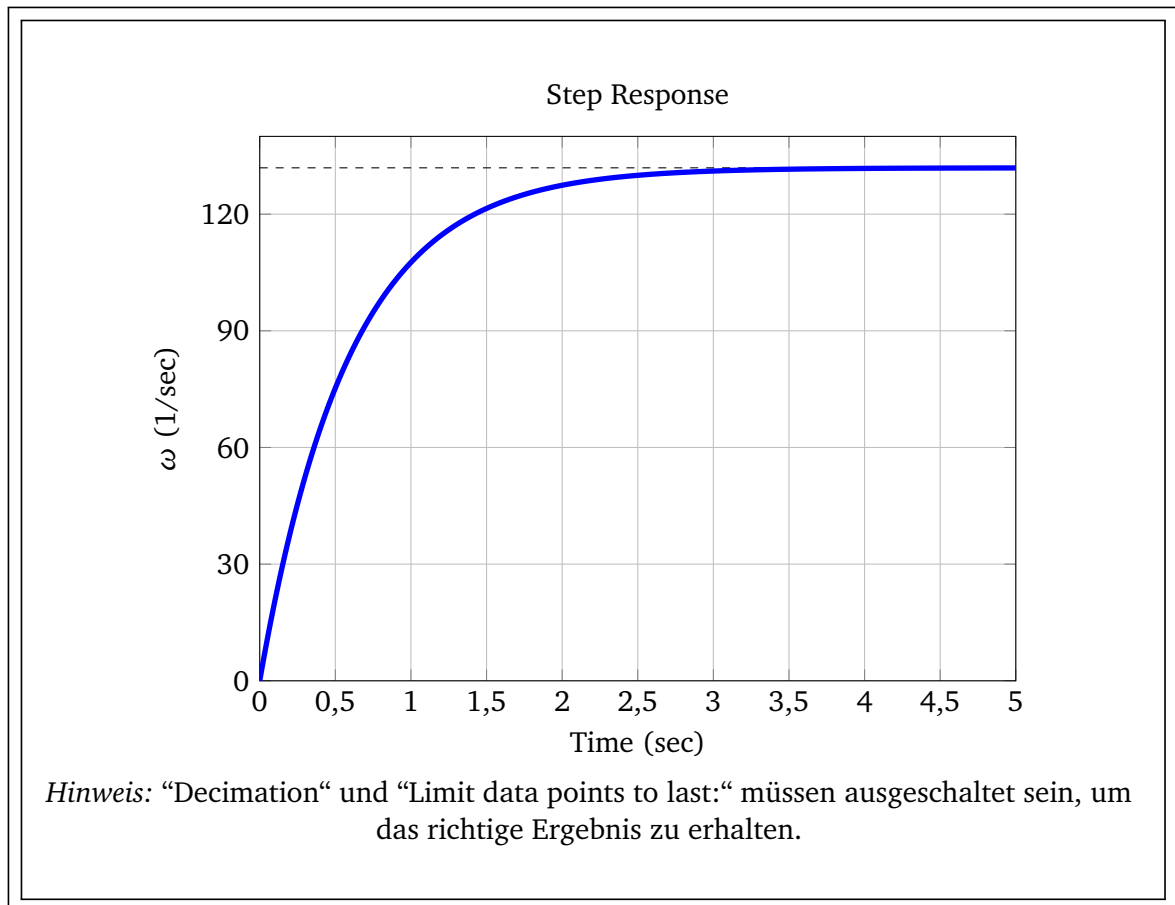
1. Erstellen Sie ein Simulink-Modell des linearisierten Ventilators.

*Hinweis:* Verwenden Sie im Simulink-Modell die Parameternamen und nutzen Sie die Möglichkeit einer Übergabe der Parameterwerte an das Modell mittels m-File. Das m-File steht zum Download bereit.



2. Regen Sie die Strecke mit einem Einheitssprung an und zeichnen Sie die Sprungantwort.

*Hinweis:* Beachten Sie die Einstellungen der „Data history“ im Scope.



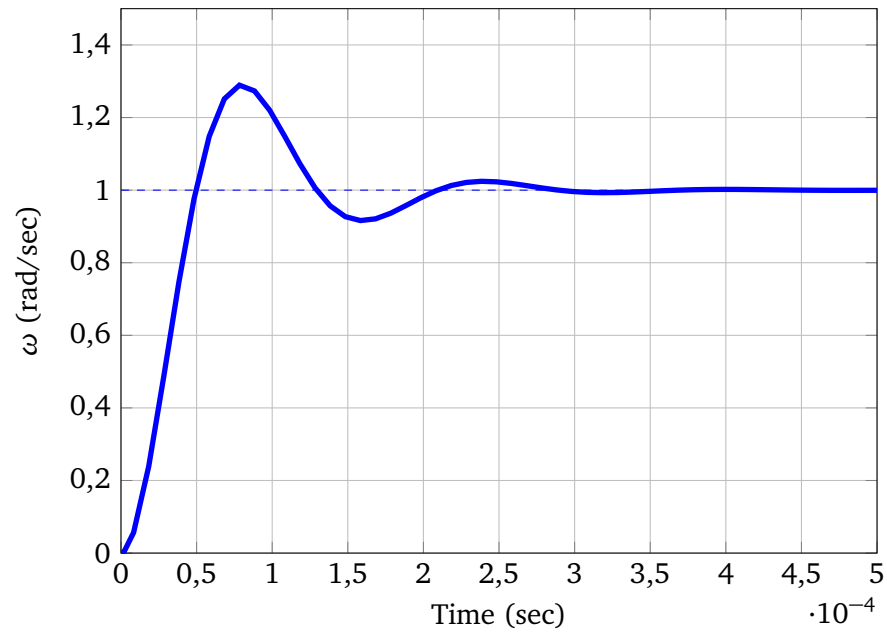
3. Erweitern Sie Ihr Simulink-Modell zu einem Regelkreis. Fassen sie hierzu das System zum Subsystem zusammen. Verwenden Sie als Regler die drei in Versuch 4 entworfenen Regler ( $P_{\text{Freq.}}$ ,  $PI_{\text{Freq.}}$  und  $PI_{\text{Betragsopt.}}$ ).

*Hinweis:* Wählen Sie eine geeignete Simulationszeit. Die Ergebnisse werden erst im Millisekunden-Bereich sichtbar!

Ordnen Sie die Sprungantworten den jeweiligen Reglern zu:

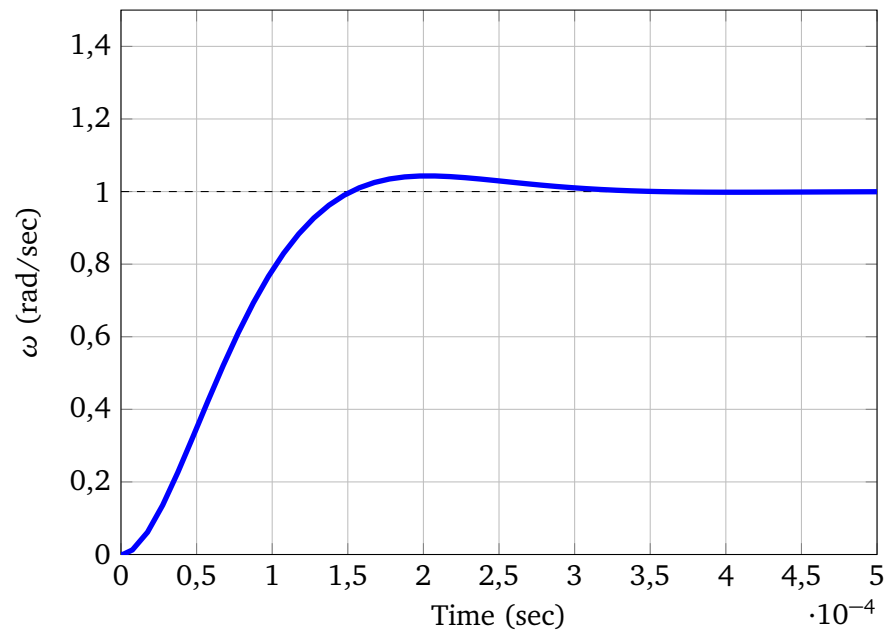
Regler:  $P_{\text{Freq.}}$  und  $PI_{\text{Freq.}}$ .

Step Response



Regler:  $PI_{\text{Betragsopt.}}$ .

Step Response

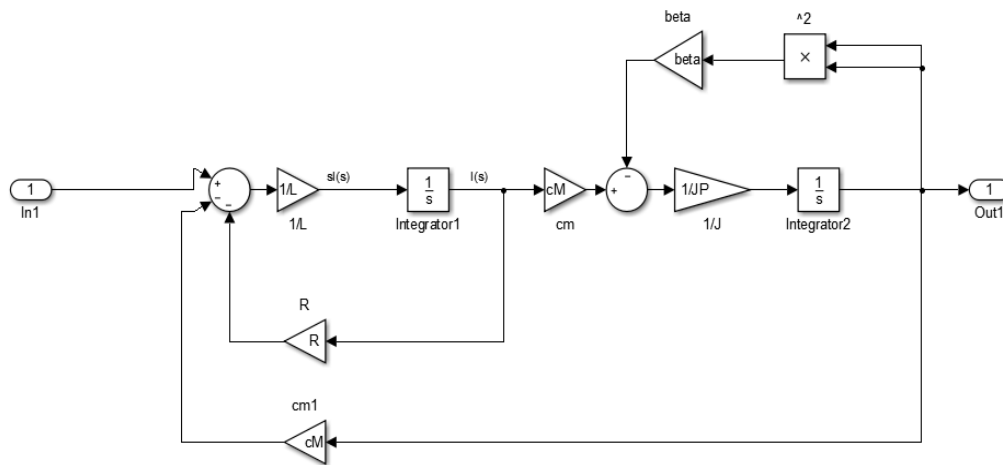


4. Führen Sie nun die letzten Schritte mit der nichtlinearen Strecke aus und vergleichen Sie die Ergebnisse mit denen des linearisierten Modells.

*Hinweis:* Kopieren Sie zunächst das Modell in eine neue Datei und nehmen Sie dann die nötigen Veränderungen vor.

- Geben Sie an, welche Modelländerungen sich ergeben.
- Beschreiben Sie die Veränderungen zu den Ergebnissen zum linearen Streckenmodell.
- Erklären Sie das beobachtete Simulationsverhalten. Fügen Sie hierzu Scopes in die Rückführung des Lastmoments  $M_L$  im linearen und nichtlinearen Modell und im Pfad des Motormoments  $M$  ein.

Blockschaltbild des nichtlinearen Ventilators:



zu a: Modelländerungen

$$\omega^2 \cdot \beta \text{ ersetzt } 2 \cdot \beta \omega_s$$

zu b: Simulationsergebnisse:

Die Simulationsergebnisse des nicht linearen Modells sind denen des linearen Modells ähnlich.

zu c: Erläuterung:

Das Lastmoment  $M_L$  ist im Vergleich zum Motormoment sehr klein. Aus diesem Grund ist der Unterschied zwischen linearem und nichtlinearem Modell vernachlässigbar klein.

### 5.3 Regelung des Pendelschraubers in Simulink

#### Hausaufgabe

- Geben Sie fünf mögliche Formen der Übertragungsfunktion eines idealen PID-Reglers mit Bezeichnung und als Formel an.

| Form                                              | Übertragungsfunktion                                                        |
|---------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------|
| Koeffizientenform                                 | $G_R(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s}$                                  |
| Pol-Nullstellenform                               | $G_R(s) = K_1 \frac{(s-s_1) \cdot (s-s_2)}{s}$                              |
| Pol-Nullstellenform bei Angabe der Zeitkonstanten | $G_R(s) = K_2 \frac{(1+T_{r1}s) \cdot (1+T_{r2}s)}{s}$                      |
| Summe aus P-, I- und D-Anteil                     | $G_R(s) = K_P + K_I \frac{1}{s} + K_D s$                                    |
| Verstärkung, Nachstellzeit und Vorhaltezeit       | $G_R(s) = K_R \cdot \left( 1 + \frac{1}{T_N \cdot s} + T_V \cdot s \right)$ |

2. Geben Sie eine kurze Beschreibung für die Umrechnung der Koeffizientenform in die anderen Formen sowie für die Umrechnung der Pol-Nullstellen-Form in die Koeffizientenform an.

- Von Koeffizientenform in Pol-Nullstellenform:  
Ausklammern von  $b_2 = K_1$  aus dem Zähler. Linearfaktorzerlegung des Zählers mittels abc- oder pq-Formel.
- Von Koeffizientenform in Pol-Nullstellenform bei Parametrierung über Zeitkonstanten:  
Überführung in Pol-Nullstellenform (siehe oben). Dann Ausklammern von  $(-s_1) \cdot (-s_2)$  aus dem Zähler. Damit ist  $K_2 = K_1 \cdot s_1 \cdot s_2$  und mit  $T_{r1} = \frac{-1}{s_1}$  und  $T_{r2} = \frac{-1}{s_2}$  ergibt sich die gesuchte Form.
- Von Koeffizientenform in Summe aus P-, I- und D-Anteil:  
 $K_P = b_1, K_I = b_0, K_D = b_2$
- Von Koeffizientenform in Verstärkung, Nachstellzeit und Vorhaltezeit:  
 $K_R = b_1, T_N = \frac{K_R}{b_0}, T_V = \frac{b_2}{K_R}$
- Von Pol-Nullstellenform und Pol-Nullstellenform bei Parametrierung über Zeitkonstanten in Koeffizientenform:  
Mittels Ausmultiplizieren des Zählers.  
 $\Rightarrow b_2 = K_1, b_1 = -K_1 \cdot (s_1 + s_2)$  und  $b_0 = K_1 \cdot s_1 s_2$   
 $\Rightarrow b_2 = K_2 \cdot T_{r1} \cdot T_{r2}, b_1 = K_2 \cdot (T_{r1} + T_{r2})$  und  $b_0 = K_2$

3. Welche Art von Solver ist zur Simulation des Pendelschraubers geeignet? Rekapitulieren Sie Versuch 3 und nennen sie die Ursache.



**Rekapitulation:**

Explizite Verfahren sind für nicht-steife und implizite Verfahren sind für steife Differentialgleichungen geeignet.

Eine Differentialgleichung wird als steif bezeichnet, wenn ihre Lösung eine abfallende Exponentialfunktion enthält, deren Zeitkonstante sehr klein ist im Vergleich zum Intervall, in dem diese DGL gelöst werden soll.

Anschaulich bedeutet dies, dass bei einem dynamischen System die Eigenwerte sehr weit auseinanderliegen.

**Systembetrachtung:**

Die Systemeigenwerte liegen in  $\lambda_{1,2,3,4} = 0, -0,39, -1,69$  und  $-30985$ . Sie liegen weit auseinander. Das DGL-System ist steif.

**Folgerung:**

Es sollte ein implizites Verfahren zur Simulation gewählt werden.

4. Stellen Sie die Übertragungsfunktion eines *realen* PID-Reglers in Koeffizientenform auf. Überführen Sie diesen nun in eine Parallelstruktur und berechnen Sie die einzelnen Verstärkungsfaktoren ( $K_p, K_I, K_D$ ).

$$G_R(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s \cdot (sT + 1)} = K_p + \frac{K_I}{s} + \frac{K_D s}{sT + 1}$$

$$K_I = b_0$$

$$K_p = b_1 - K_I T$$

$$K_D = b_2 - K_p T$$

(Wird die zusätzliche Polstelle des D-Anteils als  $(s + \frac{1}{T})$  geschrieben, ergeben sich etwas andere Verstärkungsfaktoren.)

1. Erstellen Sie ein Simulink-Modell des linearisierten Pendels. Fassen Sie auch das Pendelmodell zu einem Subsystem zusammen. Fügen Sie dann das erstellte Modell an das linearisierte Modell des Ventilators an, um das Modell des vollständigen Pendelschraubers zu erhalten.
2. Bestimmen Sie mittels des Frequenzkennlinienverfahrens aus Versuch 4 und der Faustformeln einen idealen PID-Regler mit dem ein maximales Überspringen von  $\Delta h = 0,3$  erreicht wird.

*Hinweis:* Die folgenden Aufgaben bis einschließlich 5.3.4 sind in MATLAB zu bearbeiten. Nutzen Sie die Koeffizientendarstellung zum Reglerentwurf.

**Notwendige Dämpfung:**

Es ergibt sich eine Dämpfung von  $d \geq 0,3579$ .

**Notwendige Phasenreserve:**

Es ergibt sich eine Phasenreserve von  $\varphi_R \approx 39,2579^\circ$ .

Somit muss im Phasenverlauf der Punkt  $\varphi \approx -140,7431^\circ$  angesteuert werden.

**Zeitkonstanten des PID-Reglers:**

Die Übertragungsfunktion des Pendelschraubers ist:

$$G(s) = \frac{2,244 \cdot 10^{-5}}{1,721 \cdot 10^{-9}s^4 + 5,333 \cdot 10^{-5}s^3 + 0,0001111s^2 + 3,533 \cdot 10^{-5}s}$$

Mit dem Befehl `zpk` kann diese in die Form

$$G(s) = \frac{13038,9309}{s \cdot (s + 3,099 \cdot 10^4) \cdot (s + 1,691) \cdot (s + 0,3918)}$$

gebracht werden, welche eine leichte Ermittlung der Zeitkonstanten zulässt. Es kann abgelesen werden:

$$T_{s1} = \frac{1}{3,099 \cdot 10^4} = 3,2268 \cdot 10^{-5},$$

$$T_{s2} = \frac{1}{1,691} = 0,5914 \quad \text{und}$$

$$T_{s3} = \frac{1}{0,3918} = 2,5523$$

Nach Faustformel ergeben sich die Reglerzeitkonstanten:

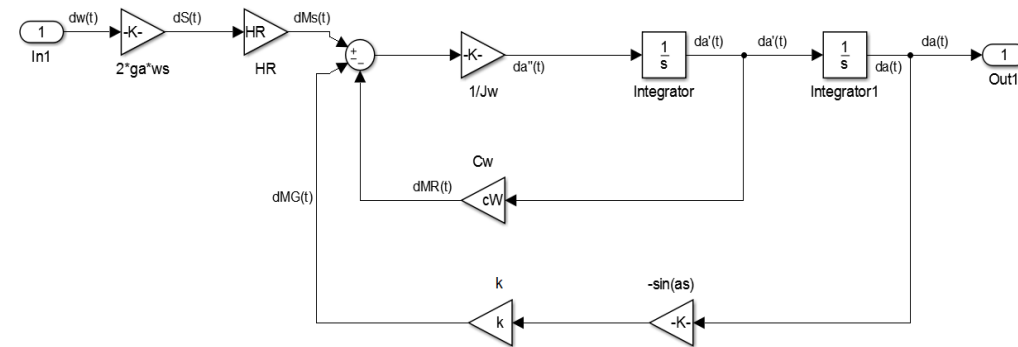
$$T_{r1} = T_{s2} = 0,5914 \quad \text{und}$$

$$T_{r2} = T_{s3} = 2,5523$$

**Regler:**

$$\begin{aligned} G_R &= K \frac{(T_{r1}s + 1) \cdot (T_{r2}s + 1)}{s} \\ &= K \frac{(T_{r1} \cdot T_{r2}) \cdot s^2 + (T_{r1} + T_{r2}) \cdot s + 1}{s} = K \frac{1,509s^2 + 3,144s + 1}{s}. \end{aligned}$$

Blockschaltbild des linearisierten Pendels:

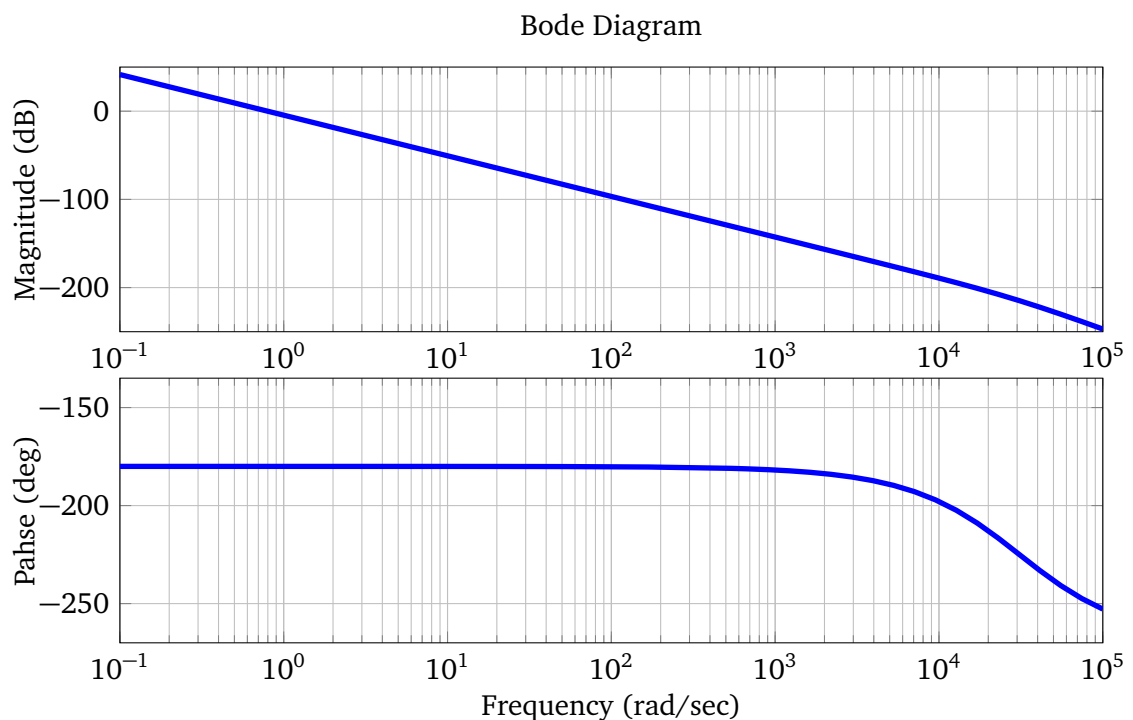


**Hinweis:** Vermeiden Sie im Folgenden das Programmieren im Workspace. Schreiben Sie Skripte für die einzelnen Versuchsteile. Auf diese Weise ist es einfacher für Sie, Ihr Vorgehen systematisch nachzuvollziehen.

- Zeichnen Sie das Bode-Diagramm des offenen Regelkreises für  $0,1 \leq \omega \leq 10^5$ .

```
>> bode(RG, {0.1, 10^5})
```

Sie erhalten folgendes Diagramm:



Was fällt Ihnen auf? Warum können Sie den Reglerentwurf nicht fortsetzen?

Die Phase ist im gesamten Frequenzbereich kleiner  $-180^\circ$ .

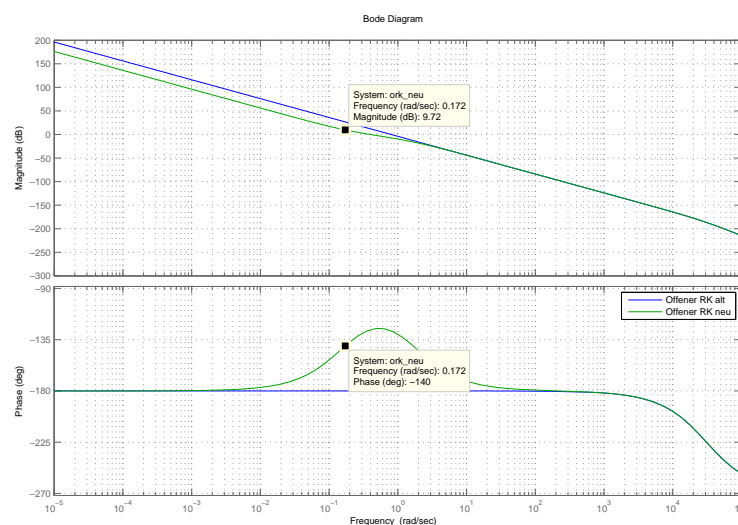
4. Modifizieren Sie Ihren Regler, so dass Sie den Entwurf mittels des Frequenzkennlinienverfahrens fortsetzen können.

Verschieben Sie dazu die Reglernullstelle bei  $s = -1,691$  um eine Dekade nach links. Zeichnen Sie das zugehörige Bode-Diagramm und bestimmen Sie den PID-Regler.

*Hinweis:* Es sollte zwei Frequenzen mit der berechneten Phasenreserve geben. Verwenden Sie die kleinere.

a) Warum wird der Entwurf jetzt möglich?

Nullstellen heben die Phase an. Ein Verschieben der Nullstelle in Richtung der relevanten Frequenzen bewirkt daher eine Phasenhebung in diesem Bereich. Die Verstärkung kann somit über die Phasenreserve abgelesen werden.



b) Geben Sie hier die PID-Reglerübertragungsfunktion an:

Es wird ein Amplitudenabsenkung um 9,72 dB benötigt, welche mittels

$$-9,72 = 20 \cdot \lg(K) \Rightarrow K = 10^{\frac{-9,72}{20}} \Rightarrow K = 0,3266$$

eines Verstärkungsfaktors von  $K = 0,3266$  erreicht wird.

Der PID-Regler hat die Übertragungsfunktion:

$$G_R = 0,3266 \cdot \frac{1,509s^2 + 0,8466s + 0,1}{s} = \underbrace{0,3266 \cdot 1,5094}_{0,49295} \cdot \frac{(s + 0,3918) \cdot (s + 0,1691)}{s}$$

*Hinweis:* wenn anstatt der Pol-Nullstellenform bei der Programmierung die Pol-Nullstellenform mit Parametrierung über die Zeitkonstanten verwendet wird, entsteht durch das Ausklammern ein zusätzlicher Faktor von 10.

5. Erproben Sie den ermittelten Regler in Simulink.

*Hinweis:* Benutzen sie die Parameternamen in Ihrem Simulink-Modell und übergeben Sie die Werte aus Ihrem Skript.

a) Warum müssen Sie Ihren Regler um einen Pol ergänzen? Welcher Regleranteil (P, I oder D) ist dafür verantwortlich?

Der ideale PID-Regler ist aufgrund des D-Anteils nicht kausal.

b) Wie muss dieser zusätzliche Pol  $(s + \frac{1}{T_1})$  gewählt werden und warum?

Die Zeitkonstante  $T_1$  des Verzögerungsgliedes erster Ordnung muss

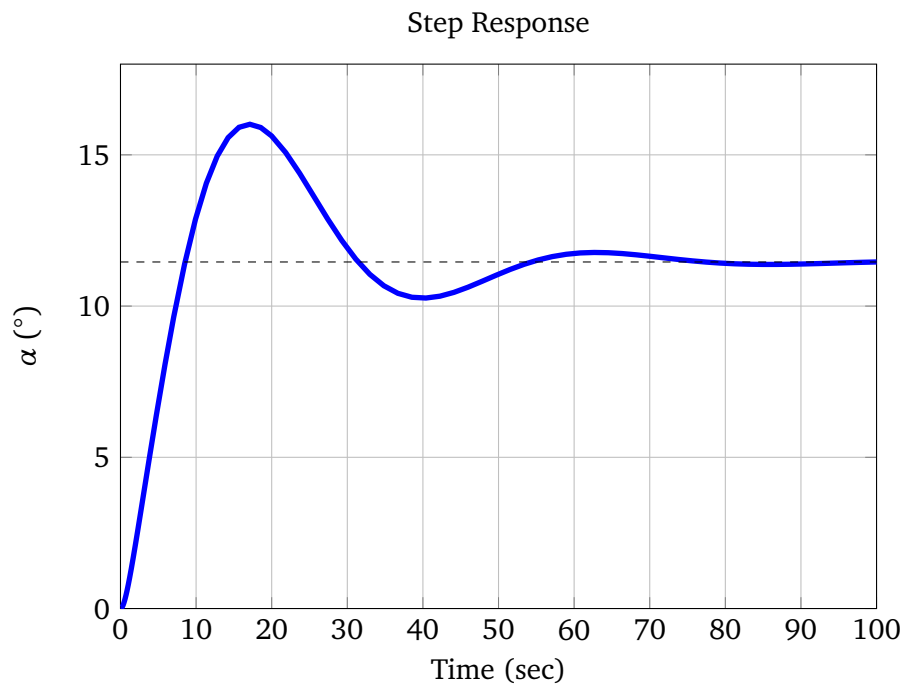
$$T_1 \ll T_{R1} \quad \text{und}$$

$$T_1 \ll T_{R2}$$

erfüllen.

6. Setzen Sie  $T_1 = 0,01$  und regen Sie den Regelkreis mit einem Sprung der Höhe 0,2 rad an.

Sie sollten das folgende Ergebnis erhalten. Passen Sie hierzu die Skalierung der Ordinatenachse von rad auf Grad an.



Geben Sie die Umrechnung von rad auf Grad hier an:

$$\alpha_{\text{Grad}} = \alpha_{\text{rad}} \frac{180}{\pi}$$

7. Simulieren Sie den gleichen Sprung nochmals. Stellen Sie diesmal den Solver ein, den Sie in der Hausaufgabe ausgewählt haben. Falls Sie den Solver bereits umgestellt haben, setzen Sie ihn wieder zurück auf den Standard-Solver ode45.

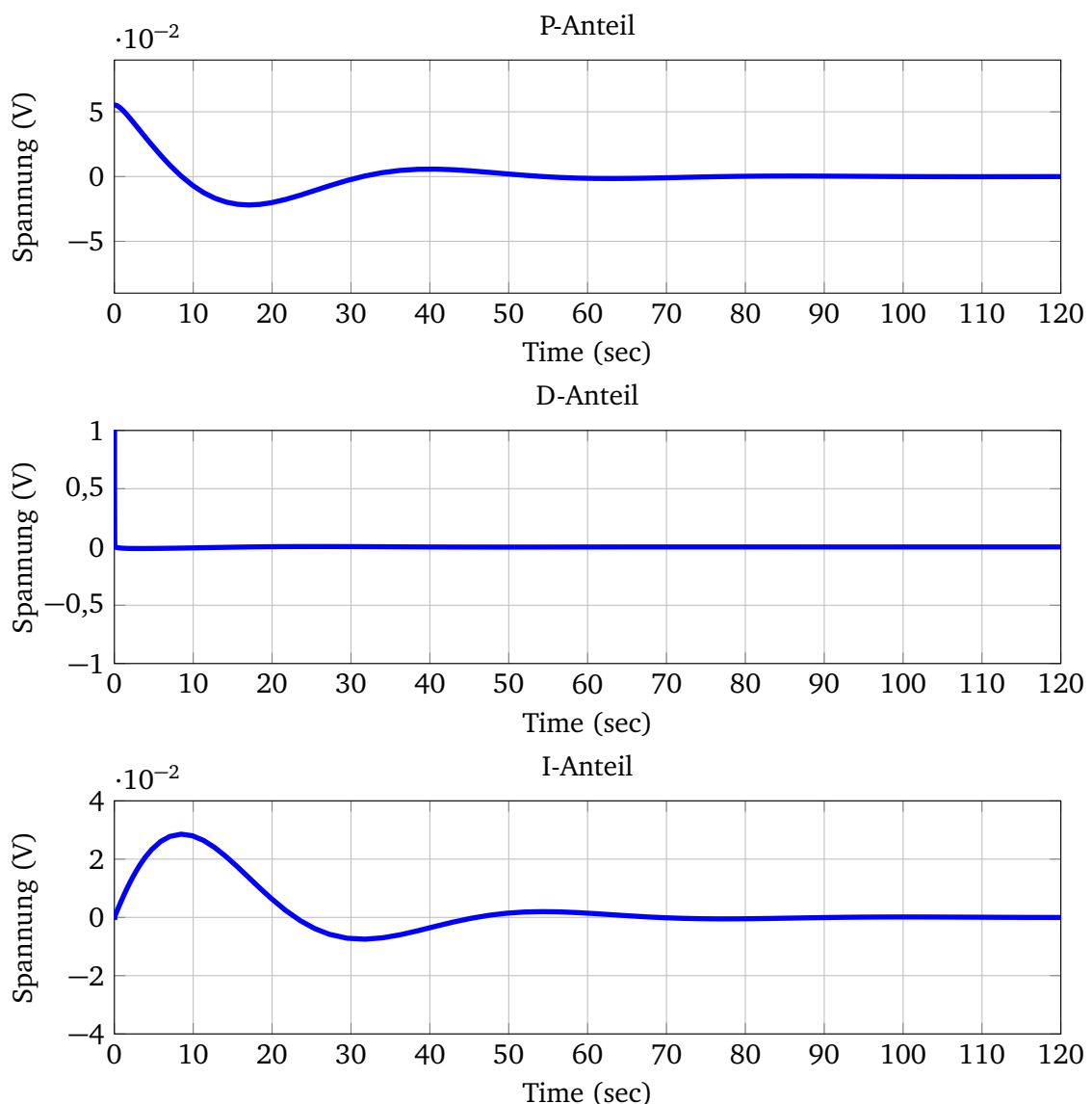
Warum ist es dringend empfohlen die Solvereinstellung zu berücksichtigen?

Die Simulationszeit ist bei Verwendung eines geeigneten Solvers um ein Vielfaches schneller.

8. Verändern Sie den realen PID-Regler, so dass er durch eine Parallelschaltung aus einem proportionalen, einem integralen und einem differenzierenden Anteil aufgebaut ist.

Fügen Sie jedem Anteil eine eigene Anzeige (Scope) hinzu und simulieren Sie den Regelkreis. Betrachten Sie die Verläufe der einzelnen Anteile des Reglers.

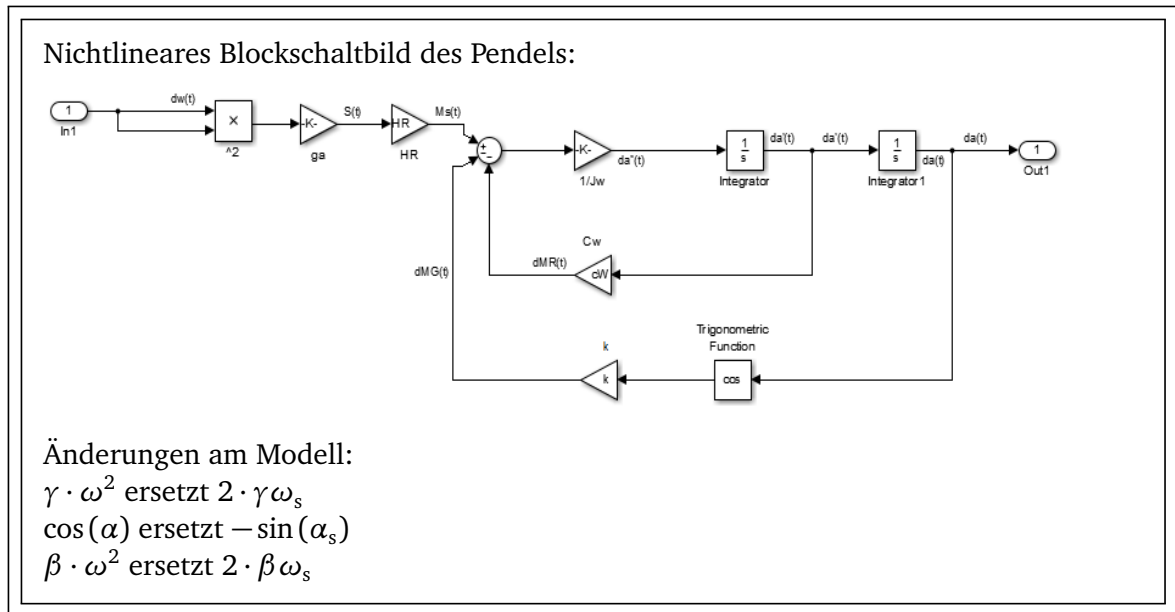
*Hinweis:* Beachten Sie die Einstellungen der „Data history“ im Scope. Sie erhalten die folgenden Plots.



$$K_I=0,0327, K_P=0,2762, K_D=0,4902$$

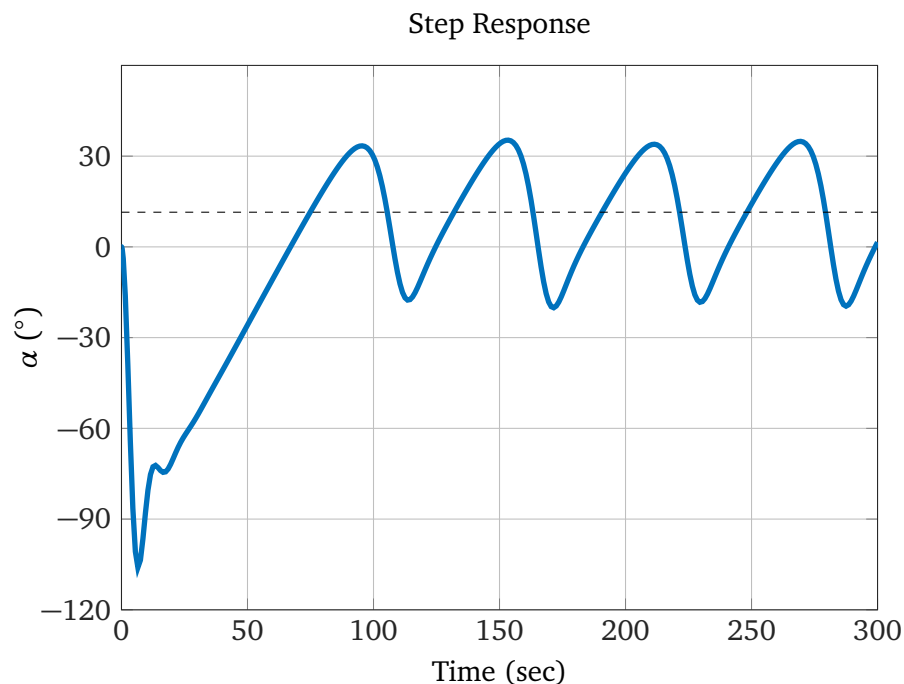
9. Erstellen Sie ein Simulink-Modell des nichtlinearen Modells mit dem am linearen Modell entworfenen Regler.

*Hinweis:* Kopieren Sie hierzu das lineare Modell in ein neues Dokument und nehmen Sie die nötigen Veränderungen vor.



10. Simulieren Sie das nichtlineare Modell für einen Eingangssprung der Höhe 0,2 rad.

Sie sollten folgendes Simulationsergebnis erhalten. Beachten Sie die Skalierung der Ordinatenachse in Grad.



*Hinweis:* Beachten Sie die Einstellungen der „Data history“ im Scope.

11. Welche zwei wesentlichen Unterschiede des Kurvenverlaufs fallen Ihnen im Vergleich zum linearen System auf? Erklären Sie diese soweit möglich!

Führen Sie die Unterschiede auf:

- Das Pendel sackt zunächst nach unten ab.
- Der Regelkreis ist nicht stabil. Der Pendelschrauber führt eine Dauerschwingung aus.

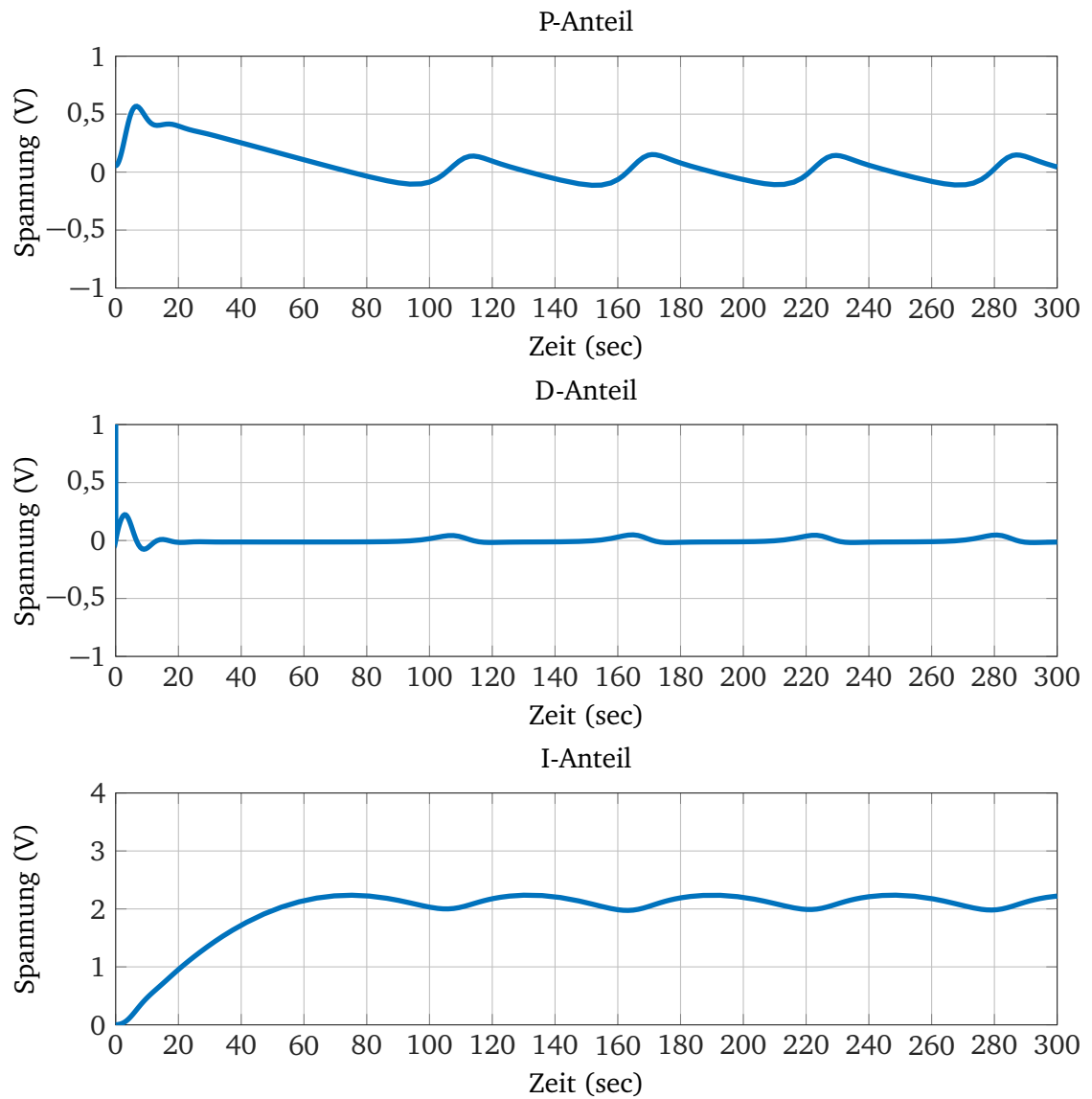
Geben Sie an, worauf sich die Unterschiede zurückführen lassen:

- Absacken:  
Der lineare Regler ist um einen Arbeitspunkt ausgelegt. D. h. der Reglerausgang  $\Delta u = 0$  bedeutet nicht, dass keine Stellgröße auf das (reale) System wirkt, sondern dass die Stellgröße  $u(t)$  gerade den Wert am Arbeitspunkt besitzen sollte,  $u(t) = U_{AP} + \Delta u$ . Dies ist in dem Modell noch nicht berücksichtigt, weshalb das Pendel zunächst absackt, bis die die Stellgröße am Arbeitspunkt,  $U_{AP}$ , letztlich vom I-Anteil des Reglers aufgebracht wird.
- Instabilität:  
Die lineare Reglerauslegung gilt für das nichtlineare System nicht mehr.

12. Betrachten Sie die Regleranteile (P, I und D).

Sie erhalten die folgenden Simulationsverläufe.





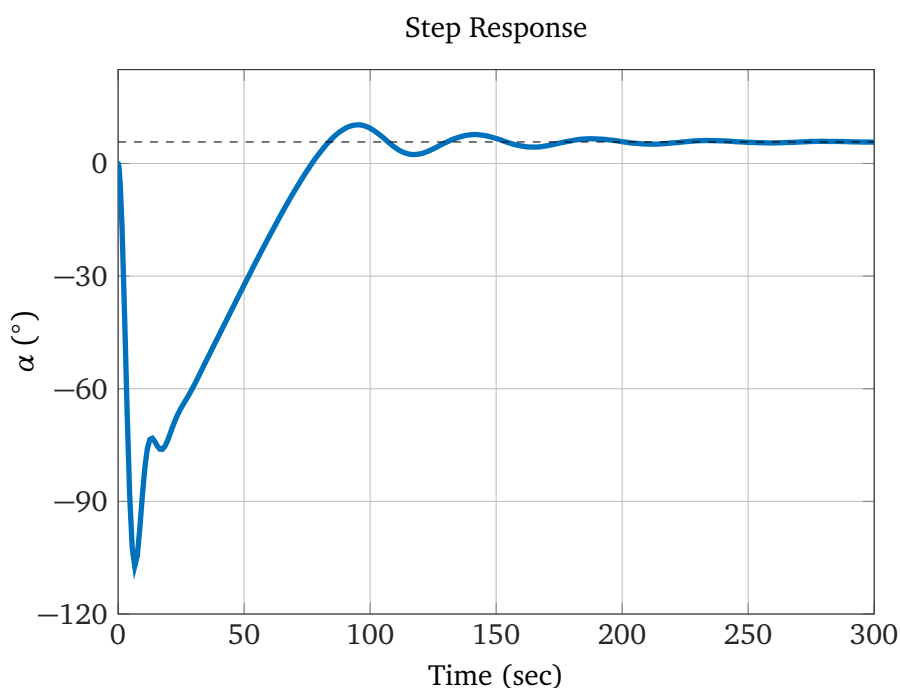
Beschreiben Sie Ihre Beobachtung und erläutern Sie das Verhalten:

Zunächst fällt das Pendel nach unten. Damit nimmt die Regelabweichung weiter zu und der P-Anteil wird entsprechend größer. Mit steigender Geschwindigkeit des Pendels nimmt auch die Ableitung der Regelabweichung zu, und der D-Anteil steigt ebenfalls. (Der impulsförmige Verlauf bei  $t = 0$  des D-Anteils ist der sprunghaft aufgeschalteten Sollgröße geschuldet.) Der D-Anteil nimmt ab dem Moment wieder ab, bei dem das Pendel nicht weiter beschleunigt, sondern abgebremst wird. Zu dem Zeitpunkt, an dem das Pendel seine tiefste Position erreicht ist die Regelabweichung maximal und der P-Anteil weist sein Maximum auf. Der D-Anteil ist zu diesem Zeitpunkt null. Die Regelabweichung nimmt dann ab, was zu einem (geringen) negativen D-Anteil führt. Der I-Anteil baut sich in dieser Phase aufgrund der dauerhaften positiven Regelabweichung langsam auf.

Wenn das Pendel die Sollposition erreicht, ist der P-Anteil gerade Null. Der I-Anteil hat jedoch einen relativ großen Wert erreicht, der sich nicht schlagartig abbaut. Daher schwingt das Pendel über und es ergibt sich eine negative Regelabweichung. Diese führt zu einer Verminderung des I-Anteils. Allerdings ist diese Verminderung, die anhält bis das Pendel wieder die Sollposition durchfährt, zu stark, so dass das Pendel dann wieder nach unten schwingt. Es stellt sich im weiteren Verlauf eine Dauerschwingung ein. Der D-Anteil nimmt dabei nur sehr geringe Werte an und wirkt dabei dämpfend.

13. Stellen Sie die Höhe des Eingangssprunges auf einen Wert von 0,1 rad. Was fällt Ihnen im Vergleich zum Sprung der Höhe 0,2 rad auf?

Sie sollten folgendes Simulationsergebnis erhalten.



Führen Sie die Unterschiede auf:  
- Der Regelkreis ist stabil.

14. Erklären Sie Ihre Simulationsergebnisse. Warum reagiert das nichtlineare Modell auf die beobachtete Art und Weise?

Erläutern Sie zum einen den grundsätzlichen Kurvenverlauf und zum anderen das Erreichen des Endwertes. Simulieren Sie zur Veranschaulichung das Erreichen des Endwertes für Sprunghöhen kleiner 0,2 rad und größer 0,2 rad.

*Hinweis:* Überlegen Sie, was ein Sprung in Höhe von 0,2 rad bzw. 0,1 rad physikalisch bedeutet.

Erläuterung:

Im linearen Modell wird der Pendelschrauber im Arbeitspunkt gehalten, wenn das System nicht angeregt wird. Dies gilt für das nichtlineare Modell nicht. Daher fällt der Pendelschrauber zunächst nach unten weg, bevor der Ventilator ausreichend Schub erzeugt.

Die Sprunghöhe von 0,2 entspricht einem Winkel von  $11,4^\circ$ . Der Pendelschrauber entfernt sich daher sehr weit vom Arbeitspunkt. Die Linearisierung ist bei dieser Entfernung vom Arbeitspunkt nicht geeignet.

15. Verändern Sie Ihr Simulink-Modell und schreiben Sie ein MATLAB-Skript, so dass Sie das Modell aus dem Skript starten können und eine beliebige Sprunghöhe und Momentenstörung zu beliebigen Zeitpunkten vorgeben können. Die Ausgabe der Simulation soll in diesem Skript über den plot-Befehl erfolgen.

Geben Sie an, welche Änderungen Sie am Modell vornehmen müssen.

1. Variablennamen z. B. „final“ in den Step-Block der Sollgröße eingeben
2. Simout-Block in das Modell einfügen oder Scope-Einstellung „Data history/ Save data to workspace“ aktivieren.

Geben Sie den Code Ihres Skriptes an:

```
final = 0.1;
sim('Pendelschrauber.slx');
%sim('Pendelschrauber.mdl');
% Ausgabe über simout:
plot(tout, simout.signals.values)
% Alternative Ausgabe über Scope:
plot(ScopeData.time, ScopeData.signals.values)
```

---

Beispielskript zu den Aufgaben:

**Listing 5.1:** Versuchsdurchführung 5.3.1 und 5.3.3

---

```
% Versuch 5.3
clc
clear
% Initialisierung der Parameter
Parameter
%%
%%
%% Versuchsdurchführung 5.3.1 %%%
%%
% Eingabe der Übertragungsfunktion

% Übertragungsfunktion Ventilators
G1 = tf(cM, [(L*JP), (R*JP+K*L), (K*R+cM^2)]);

% Übertragungsfunktion Pendels
G2 = tf(2*gamma*w_s*HR, [JW, cW, (-K*sin(alpha_s))]);

disp('Übertragungsfunktion_des_Pendelschraubers:')
G = G1 * G2

%% Ablesen der Zeitkonstanten für den Reglerentwurf

T1 = 1/3.099e4; % =3.2268e-5
T2 = 1/1.691; % =0.5914
T3 = 1/0.3918; % =2.5523

%% Reglerübertragungsfunktion

% Auswahl der dominanten Polstellen
G_R = tf([T2*T3, T2+T3, 1], [1 0]);
% Ausgabe der Reglerübertragungsfunktion
disp('Reglerübertragungsfunktion')
G_R = zpkm(G_R)

%%
%%
%% Versuchsdurchführung 5.3.3 %%%
%%
% Berechnung der offenen Strecke mit Regler und Zeichnen des Bodediagramms

RG = G_R * G;
figure('name', 'Versuchsdurchführung_5.3.3-Bodediagramm')
bode(RG, {0.1, 10^5})
grid on
```

---

---

## Listing 5.2: Versuchsdurchführung 5.3.4

---

```
%%
%%
%% Versuchsdurchführung 5.3.4 %%%%%%%%%%
%%

% Verschiebung der Nullstellen für die Phasenanhebung
G_R = zpk([-0.1691, -0.3918], 0, 1.5094);

% Übertragungsfunktion der offenen Strecke mit neuem Reglern
RG = G_R * G;

% Zeichnen des Bodediagramms
figure('name', 'Versuchsdurchführung_5.3.4-Bodediagramm')
bode(RG, {10^-4, 10^5})
grid on

%% Ablesen der Betragssenkung und Berechnung des Verstärkungsfaktors
V = 10^(-9.72/20); % =0.3266

% Eingabe der neuen Übertragungsfunktion
G_R = V * G_R;
KRG = G_R * G;

% Zeichnen der Sprungantwort
figure('name', 'Versuchsdurchführung_5.3.4-Sprungantwort')
step(feedback(KRG, 1))

[num_R, den_R] = tfdata(G_R, 'v');
```

---

---

### Listing 5.3: Versuchsdurchführung 5.3.6 und 5.3.8

---

```
%% Versuchsdurchführung 5.3.6 %%%%%%%%%%%%%%
% Ergänzung um einen weiteren Pol um Kausalität zu gewährleisten
s = tf('s');
T = 0.01;
G_R = 1/(T*s+1) * G_R;
[num_R, den_R] = tfdata(G_R, 'v');
% Endwert der Sprungantwort
final = 0.2;
sim('Pendelschrauber', 100);
t = alpha_rad.time;
alpha_grad = alpha_rad.signals.values .* 180/pi;

figure('name', 'Versuchsdurchführung_5.3.6-Simulationsergebnis')
plot(t, alpha_grad)
xlabel('Zeit_(s)');
ylabel('\alpha_(^)')
grid on

%% Versuchsdurchführung 5.3.8 %%%%%%%%%%%%%%
% PIDT1-Regler als Parallelschaltung
% Berechnung der Parameter KR, KI und KD
KI = T * num_R(3);
KR = (num_R(2) - KI) * T;
KD = (num_R(1) - KR) * T;
% Endwert der Sprungantwort
final = 0.2;
sim('PendelschrauberParallelschaltung', 120);
t = PAnteil.time;
UPAnteil = PAnteil.signals.values;
UDAnteil = DAnteil.signals.values;
UIAnteil = IAnteil.signals.values;

figure('name', 'Versuchsdurchführung_5.3.8-Simulationsergebnis')
subplot(3, 1, 1)
plot(t, UPAnteil);
title('P-Anteil')
xlabel('Zeit_(s)')
ylabel('Spannung_(V)')
grid on

subplot(3, 1, 2)
plot(t, UDAnteil);
title('D-Anteil')
xlabel('Zeit_(s)')
ylabel('Spannung_(V)')
grid on

subplot(3, 1, 3)
plot(t, UIAnteil)
title('P-Anteil')
xlabel('Zeit_(s)')
ylabel('Spannung_(V)')
grid on
```

---

---

### Listing 5.4: Versuchsdurchführung 5.3.9 und 5.3.12

---

```
%% Versuchsdurchführung 5.3.9 %%%%%%%%%%%%%%
% PIDT1-Regler am nichtlinearen Modell
% Endwert der Sprungantwort
final = 0.2;
sim('PendelschrauberNichtlin', 300);

t = alpha_rad_nichtl.time;
alpha_grad_nichtl = alpha_rad_nichtl.signals.values .* 180/pi;

figure('name', ...
 'Versuchsdurchführung_5.3.9-Simulationsergebnis_am_nichtlinearen_Modell')

plot(t, alpha_grad_nichtl)
xlabel('Zeit_(s)');
ylabel('\alpha_(^)');
grid on
%%
%% Versuchsdurchführung 5.3.12 %%%%%%%%%%%%%%
% PIDT1-Regler als Parallelschaltung am nichtlinearen Modell

% Endwert der Sprungantwort
final=0.2;
sim('PendelschrauberParallelschaltungNichtlin', 300);
t = PAnteilNichtlin.time;
UPAnteilNichtlin = PAnteilNichtlin.signals.values;
UDAnteilNichtlin = DAnteilNichtlin.signals.values;
UIAnteilNichtlin = IAnteilNichtlin.signals.values;

figure('name', ...
 'Versuchsdurchführung_5.3.12-Simulationsergebnis_nichtlineares_Modell')

subplot(3, 1, 1)
plot(t, UPAnteilNichtlin);
title('P-Anteil')
xlabel('Zeit_(s)')
ylabel('Spannung_(V)')
grid on

subplot(3, 1, 2)
plot(t, UDAnteilNichtlin);
title('D-Anteil')
xlabel('Zeit_(s)')
ylabel('Spannung_(V)')
axis([0, 300, -1, 1])
grid on

subplot(3, 1, 3)
plot(t, UIAnteilNichtlin);
title('P-Anteil')
xlabel('Zeit_(s)')
ylabel('Spannung_(V)')
grid on
```

---





# Musterlösung Versuch 6

## 6.1 Das SISO-Tool in MATLAB

Gegeben sei das System

$$G_S(s) = \frac{1}{s^3 + s^2}.$$

Dieses System soll mit Hilfe der WOK stabilisiert und mit höchstmöglicher Schnelligkeit geregelt werden.

### Hausaufgaben

1. Skizzieren Sie die WOK des offenen Regelkreises mit einem P-Regler  $G_R(s) = k$  (ohne Rechnerunterstützung). Beschränken Sie sich dabei auf die im Skript, Abschnitt 6.1.2 genannten Regeln, und geben Sie die benutzten Regeln an.

- Nullstelle: keine
- Pole:

$$\begin{aligned}s_{1,2} &= 0 \\ s_3 &= -1\end{aligned}$$

- VZP:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{\sigma + 1} - \frac{1}{\sigma} - \frac{1}{\sigma} &= 0 \\ \Rightarrow \sigma &= \frac{-2}{3}\end{aligned}$$

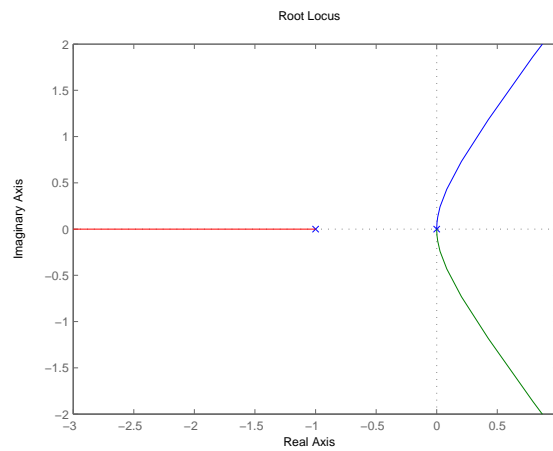
- Asymptoten:

$$\varphi_i = \frac{2i + 1}{3} \cdot \pi = \begin{cases} \frac{\pi}{3} & \text{für } i = 0 \\ \pi & \text{für } i = 1 \\ \frac{5\pi}{3} & \text{für } i = 2 \end{cases}$$

- Wurzelschwerpunkt:

$$\sigma = \frac{1}{-3}$$

Eigentliche WOK:



2. Ist die Strecke  $G_S(s)$  BIBO-stabil? Warum?

Die Strecke ist instabil, da sie zwei Pole bei  $s_{1,2} = 0$  hat.

3. Für welche Verstärkung  $k$  eines P-Reglers ist der geschlossene Regelkreis BIBO-stabil?

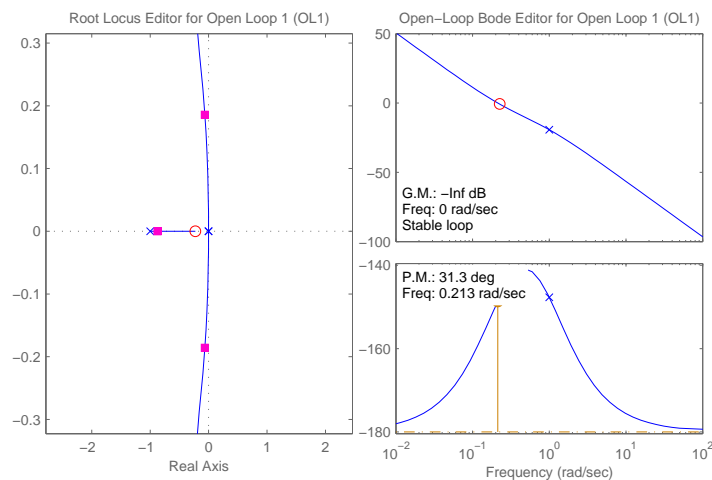
Die Strecke ist für alle  $k$  instabil. Siehe WOK.

1. Geben Sie  $G_S(s)$  in MATLAB ein. Öffnen Sie das SISO-Tool und importieren Sie die Übertragungsfunktion der Strecke in den Standardregelkreis. Ist der geschlossene Regelkreis stabil? Wenn ja, für welche Verstärkungsfaktoren  $k > 0$ ?

Der geschlossene Regelkreis ist nicht stabil. Siehe WOK.

2. Fügen Sie im SISO-Tool eine Regler-Nullstelle bei  $s = -2$  ein und betrachten Sie die WOK. Um was für einen Reglertyp handelt es sich? Verschieben Sie die Nullstelle auf der reellen Achse. In welchen Bereichen muss die Nullstelle auf der reellen Achse liegen, damit der geschlossene Regelkreis stabil ist?

Die Nullstelle kann durch Anklicken des Comperatorfeldes eingefügt werden oder durch Platzieren einer Nullstelle mit Hilfe von Drag and Drop.



Es handelt sich um einen idealen PD-Regler. Damit der geschlossene Regelkreis stabil ist, muss die Nullstelle zwischen  $s = -1$  und  $s = 0$  liegen.

Benutzen Sie nun den Regler

$$G_R(s) = k \cdot \frac{s+0,25}{s+0,5}.$$

3. Berechnen Sie die Reglerverstärkung  $k_{\max}$ , bei der der geschlossene Regelkreis gerade noch stabil ist (Schnittpunkt mit der imaginären Achse) und geben Sie diese an. Mit welcher Frequenz schwingt das System an der Stabilitätsgrenze?

$$G_o(s) = \frac{s + 0,25}{s^4 + 1,5s^3 + 0,5s^2}$$
$$N_o(s) + k \cdot Z_o(s) = 0$$

mit  $s = j\omega$

$$(j\omega)^4 + 1,5(j\omega)^3 + 0,5(j\omega)^2 + k(j\omega) + 0,25k = 0$$
$$\omega^4 - 1,5j\omega^3 - 0,5\omega^2 + jk\omega + 0,25k = 0$$

Realteil:

$$\omega^4 - 0,5\omega^2 + 0,25k = 0 \quad (I)$$

Imaginärteil:

$$-1,5\omega^3 + k\omega = 0 \quad (II)$$

Mit Substitution von  $\omega^2 = x$

$$x^2 - 0,5x + 0,25k = 0 \quad (I)$$

$$x = \frac{2}{3} \cdot k \quad (II)$$

(II) in (I):

$$\frac{4}{9}k^2 - \frac{1}{12}k = 0$$
$$\rightarrow k_1 = 0$$
$$\rightarrow k_2 = \frac{9}{48} = 0,1875$$

$\omega$  an der Stabilitätsgrenze:

$$\omega^2 = \frac{2}{3}k = 0,125 \rightarrow \omega = \pm\sqrt{0,125} \approx \pm 0,3536$$

Somit ist der geschlossene Regelkreis für  $0 < k \leq 0,1875$  stabil. Das System schwingt an der Stabilitätsgrenze mit  $\omega = +\sqrt{0,125} \frac{1}{s}$ .

4. Fügen Sie den Regler ins SISO-Tool ein. Gehen Sie hierbei so vor, dass der Regler als Compensator im Block C steht. Bei welcher Reglerverstärkung  $\tilde{k}_{\max}$  ist der geschlossene Regelkreis gerade noch stabil?

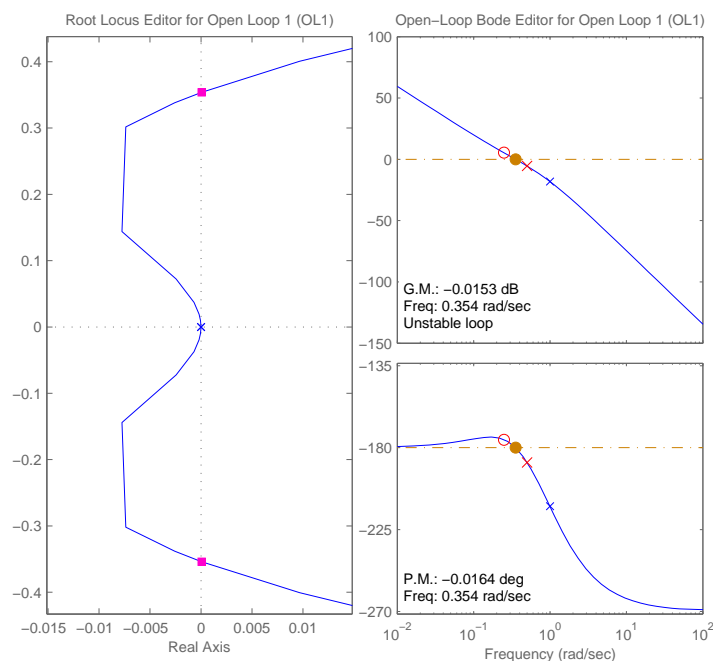
*Hinweis:* Öffnen Sie im SISO-Tool die Anzeige der Sprungantwort, um die Verstärkung exakt zu bestimmen.

Erklären Sie den Unterschied zwischen dem berechneten  $k_{\max}$  und dem im Compensatorfeld abgelesenen  $\tilde{k}_{\max}$ . Öffnen Sie hierzu das Compensatorfeld.

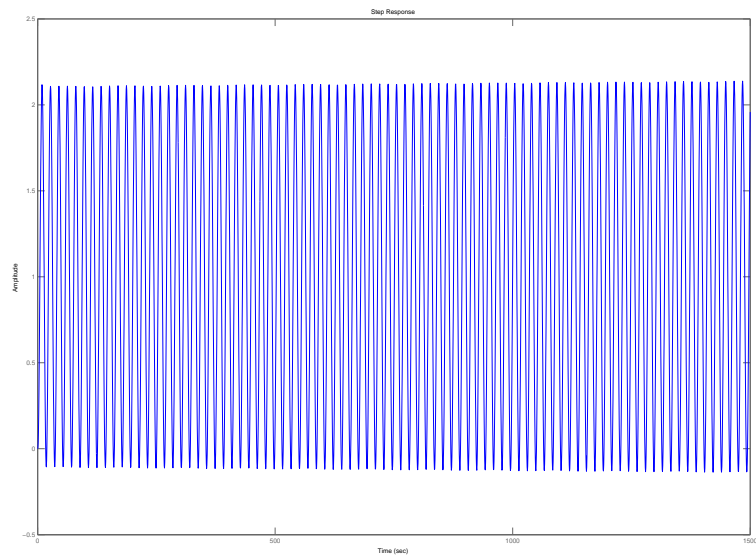
```
regler = tf([1 0.25], [1 0.5]); sisotool(sys,regler)
```

Beim Ablesen der zulässigen Reglerverstärkung ist darauf zu achten, dass sich die Übertragungsfunktion des Regler **nicht** in der Normalform befindet. Deshalb liegt der zulässige Bereich im SISO-Tool bei  $0 < \tilde{k} \leq 0,0938$  für einen Regler mit der Übertragungsfunktion  $\tilde{G}_R(s) = \tilde{k} \frac{1+4s}{1+2s}$ . Zurückgerechnet ergibt  $0 < k < 0,1876$  für den ursprünglichen Regler.

WOK von  $G_o(s) = \frac{s+0,25}{(s^3+s^2) \cdot (s+0,5)}$  mit Reglerverstärkung  $\tilde{k} = 0,0938$ :



Sprungantwort von  $G_o(s) = \frac{s+0,25}{(s^3+s^2)(s+0,5)}$  mit Reglerverstärkung  $\tilde{k} = 0,0938$ :



5. Lassen Sie sich die Sprungantwort des geschlossenen Reglerkreises für die Regelverstärkung  $\tilde{k}_{\text{mittel}} = 0,5 \cdot \tilde{k}_{\text{max}}$  anzeigen. Geben Sie Anstiegs- und Ausregelzeit und das maximale Überschwingen, falls vorhanden, an. Nutzen Sie hierzu die Funktionen zur Analyse von Plots im SISO-Tool.

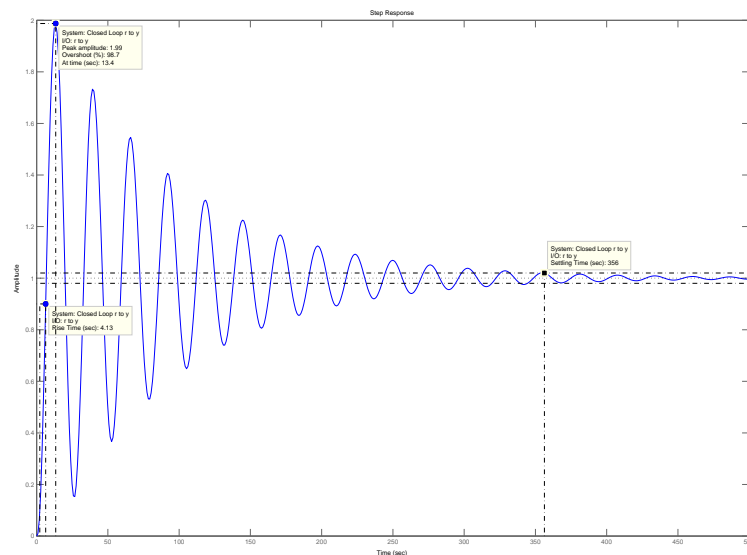
Als Verstärkungsfaktor wurde

$$0,0938/2 = 0,0469 = \tilde{k}_{\text{max}} \cdot 0,5 = \tilde{k}_{\text{mittel}}$$

$$0,1876/2 = 0,0938 = k_{\text{max}} \cdot 0,5 = k_{\text{mittel}}$$

gewählt.

Sprungantwort von  $G_o(s) = \frac{s+0,25}{(s^3+s^2)(s+0,5)}$  mit Reglerverstärkung  $\tilde{k} = 0,0469$ :



$$T_{\text{rise}} = 4,14\text{s}$$

$$\Delta h = 98,7\%$$

$$T_{5\%} = 356\text{s}$$

6. Die Wurzelortskurve für positive Verstärkungsfaktoren heißt *eigentliche WOK*, für negative Verstärkungsfaktoren *komplementäre WOK*. Lassen Sie sich von MATLAB die Wurzelortskurve für negative  $k$  anzeigen. Überlegen Sie, wie Sie die Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises verändern müssen, um die komplementäre WOK mit dem SISO-Tool zeichnen zu lassen. Geben Sie die Übertragungsfunktion an.

Für negative Verstärkungsfaktoren ergibt sich der Regler

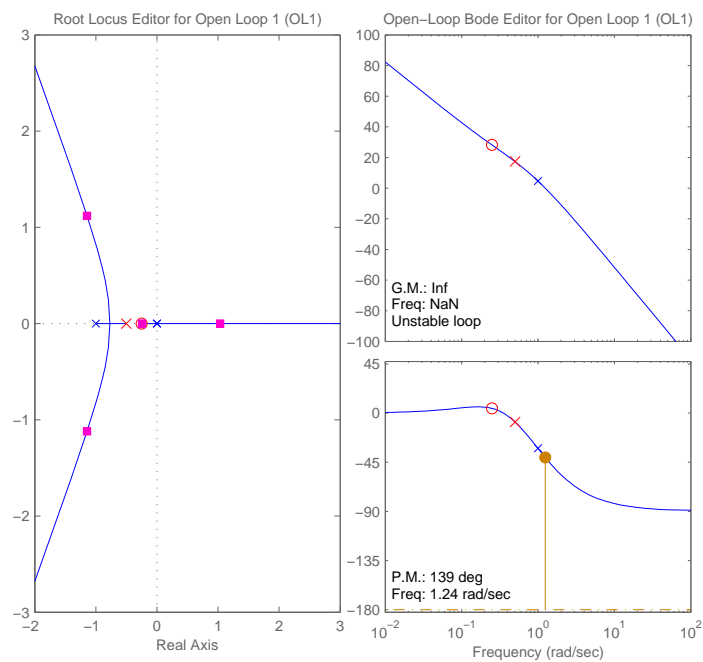
$$G_{R,negativ}(s) = -k \frac{s + 0,25}{s + 0,5}.$$

Somit folgt für den offenen Regelkreis

$$\begin{aligned} G_{o,negativ}(s) &= G_s(s) \cdot G_{R,negativ}(s) \\ &= G_s(s) \cdot (-k) \frac{s + 0,25}{s + 0,5}. \\ \Rightarrow G_{o,negativ}(s) &= -G_o(s) \end{aligned}$$

Um sich die komplementäre WOK anzeigen zu lassen, übergibt man folglich nur die negative Übertragungsfunktion des offenen Regelkreises.

komplementäre WOK von  $G_s(s) = \frac{1}{s^3 + s^2}$ :





---

## 6.2 Analyse des Pendelschraubers mit Hilfe der WOK

---

Das Modell des Pendelschraubers ist nichtlinear. Wir betrachten an diesen Stellen die durch Linearisierung um den Arbeitspunkt  $\alpha_s = 0^\circ$  entstandene linearisierte Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{2,24 \cdot 10^{-5}}{1,72 \cdot 10^{-9}s^4 + 5,33 \cdot 10^{-5}s^3 + 1,11 \cdot 10^{-4}s^2 + 3,533 \cdot 10^{-5}s}.$$

---

### Hausaufgaben

---

1. Ist dieses System stabil? Begründung Sie ihre Antwort.

Die Pole des Systems liegen bei

$$s_1 = 0$$

$$s_2 = -0,39$$

$$s_3 = -1,69$$

$$s_4 = -30986$$

Das System hat einen einfachen Pol in Null und ist somit instabil.

---

### Versuchsdurchführung

---

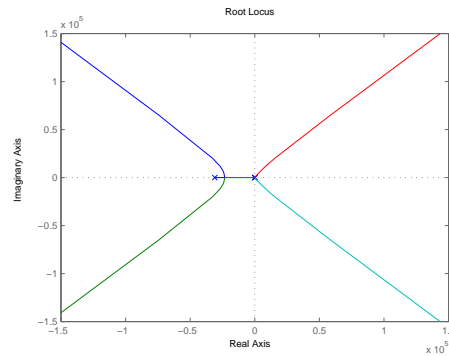
1. Geben Sie die Übertragungsfunktion des Pendelschraubers in MATLAB ein und lassen Sie sich die Wurzelortskurve mit dem SISO-Tool anzeigen. Geben Sie, sofern möglich, den Bereich an, in dem die Verstärkung des P-Reglers  $G_R(s) = k'$  liegen darf, damit der geschlossene Regelkreis stabil ist.

*Achtung:* Verwechseln Sie nicht die Reglerverstärkung  $k'$  (die in den anderen Beispielen als  $k$  bezeichnet wurde) mit der Konstanten  $k$  aus der Modellbildung (Gleichung (A.17) im Skript).

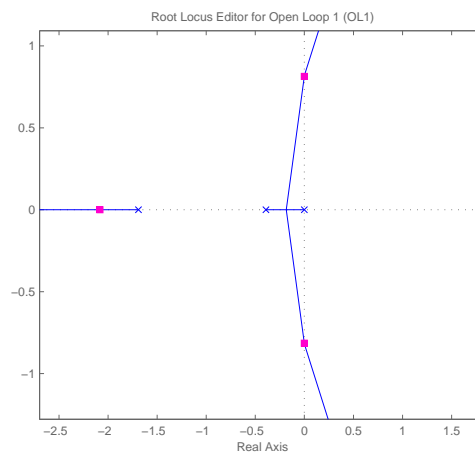
```
sys = tf([2.24e-5], [1.72e-9, 5.33e-5, 1.11e-4, 3.533e-5, 0]);
sisotool(sys)
```

Die Wurzelortskurve zeigt den über einen P-Regler geschlossenen Regelkreis. Für kleine  $0 < k' \leq 3,285$  stabilisiert der P-Regler die IT<sub>3</sub>-Strecke.

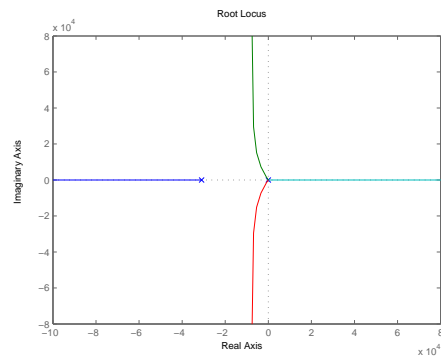
eigentliche WOK:



eigentliche WOK (gezoomt):



komplementäre WOK:



2. Regeln Sie den Pendelschrauber mit dem in Aufgabe 5.2.4 gefundenen PID-Regler

$$G_R(s) = k' \frac{(s + 0,3913) \cdot (s + 0,1696)}{s} \quad (6.1)$$

Lassen Sie sich die Wurzelortskurve mit dem SISO-Tool anzeigen. In welchem Bereich liegt die Verstärkung, damit das System stabil ist? Lesen Sie  $\tilde{k}'$  ab und berechnen Sie  $k'$ .

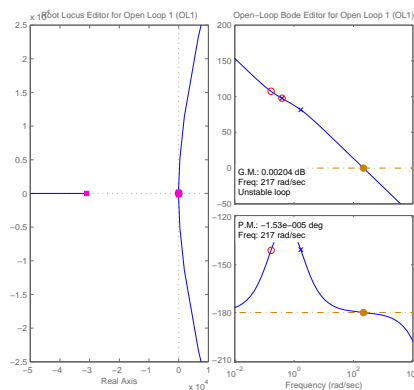
*Hinweis:* Zoomen Sie in die WOK und öffnen Sie im SISO-Tool die Anzeige der Sprungantwort, um die Verstärkung exakt zu bestimmen.

```
regler = zpk([-0.3918 -0.1691], [0], [1]);
sisotool(sys, regler)
```

*Hinweis:* Es kommt zu Rundungsungenauigkeiten bei der Umrechnung der Verstärkungen  $\tilde{k}'$  zu  $k'$ . Es gilt  $k' \approx 15,34 \cdot \tilde{k}'$   
Es ergibt sich:

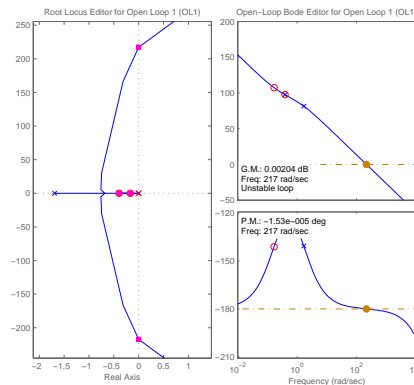
$$\begin{aligned} G_{\text{instabil}}(s) &\approx 7447 \frac{(1 + 2,6s) \cdot (1 + 5,9s)}{s} \\ &\approx 114237 \frac{(s + 0,3918) \cdot (s + 0,1691)}{s} \end{aligned}$$

SISO-Tool für den geregelten Pendelschrauber:

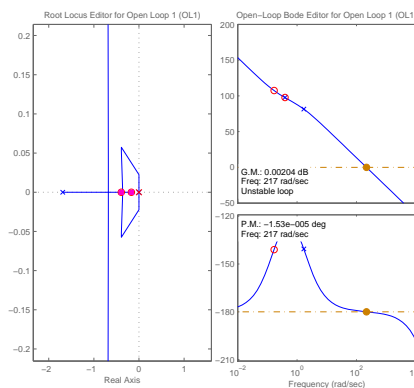


Es ist zu beachten, dass am Anfang die Achsenskalierung sehr groß gewählt ist. Man erkennt nicht gleich, ob der geschlossene Regelkreis stabil oder instabil ist. Beim Skalieren der Achsen auf  $-2 \leq \text{Re}(s) \leq 2$  und  $-250 \leq \text{Im}(s) \leq 250$  erkennt man, dass der geschlossene Regelkreis für  $0 < \tilde{k}' \leq 7447$  stabil ist.)

SISO-Tool für den geregelten Pendelschrauber (vergrößert):



SISO-Tool für den geregelten Pendelschrauber (stark vergrößert):



3. Bei welcher Verstärkung ist der geschlossene Regelkreis schwingungsfrei und so schnell wie möglich?

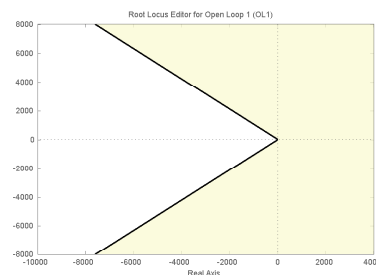
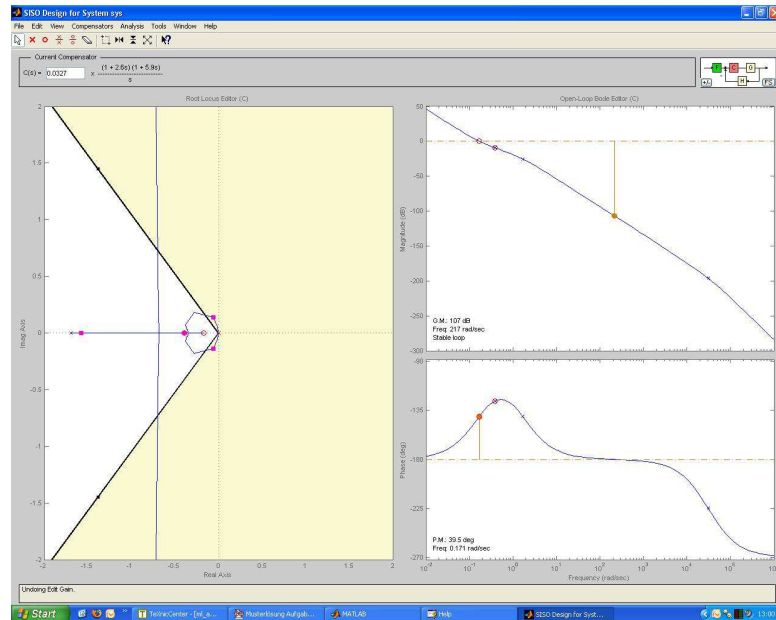
Es ist nicht möglich, einen nicht schwingungsfähigen geschlossenen Regelkreis mit diesem Regler zu erhalten, da immer ein konjugiert komplexes Polpaar existiert.

4. Der geschlossene Regelkreis darf ein maximales Überschwingen von 5 % aufweisen. Zeichnen Sie den Bereich für 5 % Überschwingen in die komplexe Ebene ein. Fügen Sie die Anforderung in das SISO-Tool ein und analysieren Sie, ob der Regler aus Versuch 5 diese Anforderung erfüllen kann. Wenn ja, in welchem Bereich muss das abgelesene  $\tilde{k}'$  und das für den Regler berechnete  $k'$  liegen.

Verhält sich der geschlossene Regelkreis auch entsprechend? (Begründung)

Der Polbereich, in dem die Pole liegen dürfen, damit ein maximales Überschwingen (Percent overshoot) von 5 % auftritt, kann durch einen Rechtsklick im *WOK-Fenster* im Menü *Design Constraints* eingefügt werden.

WOK mit eingezeichnetem Polbereich für 5 % Überschwingen:



Für die Reglerverstärkungen ergibt sich für die beiden Darstellungen

$$G_R(s) = \tilde{k}' \cdot \frac{(1 + 2,6s) \cdot (1 + 5,9s)}{s}$$

$$= k' \cdot \frac{(s + 0,3918) \cdot (s + 0,1691)}{s}$$

Werte zwischen

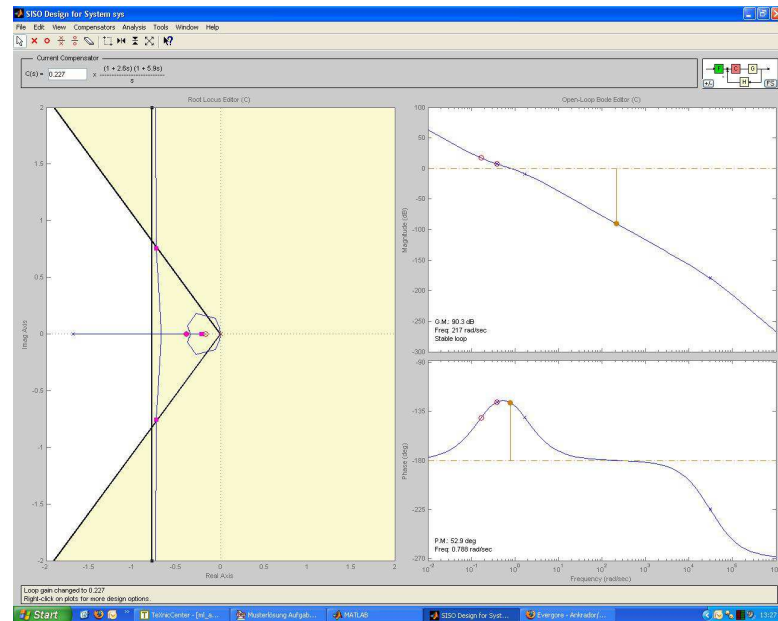
$$0,092 < \tilde{k}' < 0,23, \quad 1,41 < k' < 3,53.$$

Es ist zu beachten, dass die Anforderungen nicht erfüllt werden, da das System nicht die Ordnung zwei hat. Die Bedingungen für die Polbereiche gelten nur für Systeme, die ein dominantes Polpaar haben, sonst sind sie nur Annäherungen.

5. Eine weitere Forderung an den Regler sei, dass die Ausregelzeit maximal 5 Sekunden betragen darf. Ist diese Anforderungen mit dem Regler erfüllbar? Wenn ja, für welche Verstärkungen  $k'$ ?

Im WOK-Fenster muss im *Design Constraints* eine Settletime von 5 Sekunden eingestellt werden (siehe WOK vorherige Aufgabe).

WOK mit eingezeichnetem Polbereich für 5 % Überspringen und Settletime von 5 s:



Es ist zu erkennen, dass die Anforderungen nicht erfüllt werden können.

6. Untersuchen Sie nun, wie gut der Regler aus Versuch 5 ist, wenn der Arbeitspunkt  $\alpha_s = 0^\circ$  verlassen wird. Verwenden Sie die angegebenen um  $\alpha_s$  linearisierten Übertragungsfunktionen:

$$\alpha_s = 0,25 \cdot \pi:$$

$$G_{0,25\pi}(s) = \frac{1,89 \cdot 10^{-5}}{1,72 \cdot 10^{-9}s^4 + 5,33 \cdot 10^{-5}s^3 + 1,08 \cdot 10^{-4}s^2 + 2,29 \cdot 10^{-5}s - 1,87 \cdot 10^{-5}}$$

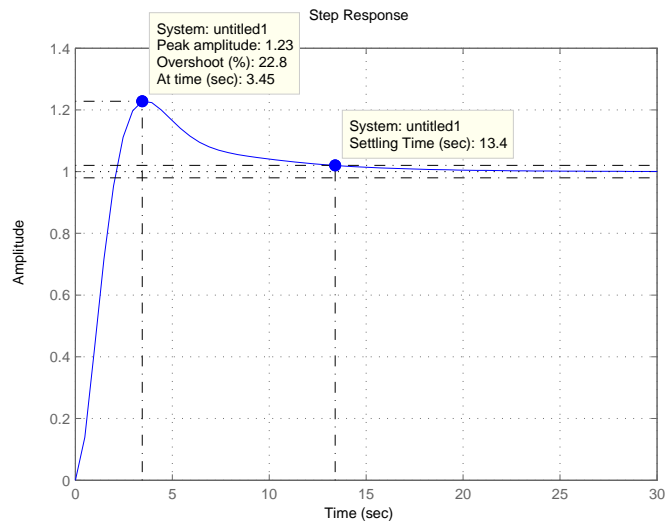
$$\alpha_s = -0,25 \cdot \pi:$$

$$G_{-0,25\pi}(s) = \frac{1,89 \cdot 10^{-5}}{1,72 \cdot 10^{-9}s^4 + 5,33 \cdot 10^{-5}s^3 + 1,09 \cdot 10^{-4}s^2 + 4,57 \cdot 10^{-5}s + 1,87 \cdot 10^{-5}}$$

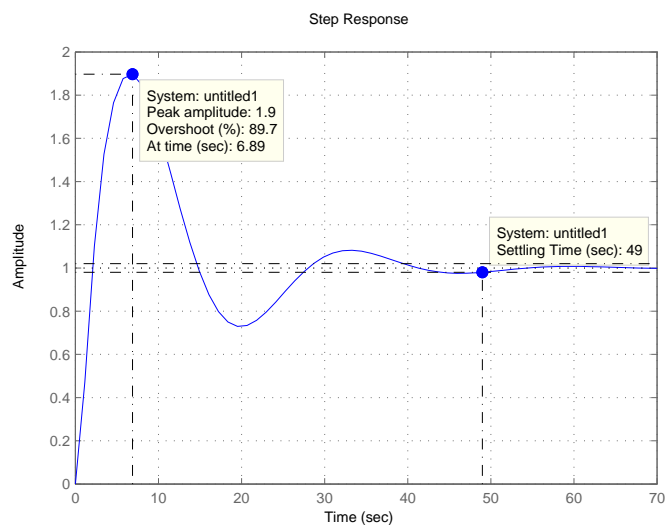
Untersuchen Sie die verschiedenen geschlossenen Regelkreise für den maximalen aus Aufgabe 6.2.4 ermittelten  $k'$ -Wert. Wie unterscheidet sich das Verhalten der Regelkreise von dem um  $\alpha_s = 0^\circ$  linearisierten?

Um den Regler für verschiedene Stecken miteinander zu vergleichen, wurde der Verstärkungsfaktor  $\tilde{k}' = 0,23$  bzw.  $k' = 3,53$  festgehalten. Die Pole der geschlossenen Systeme sind dann für alle drei Arbeitspunkte negativ.

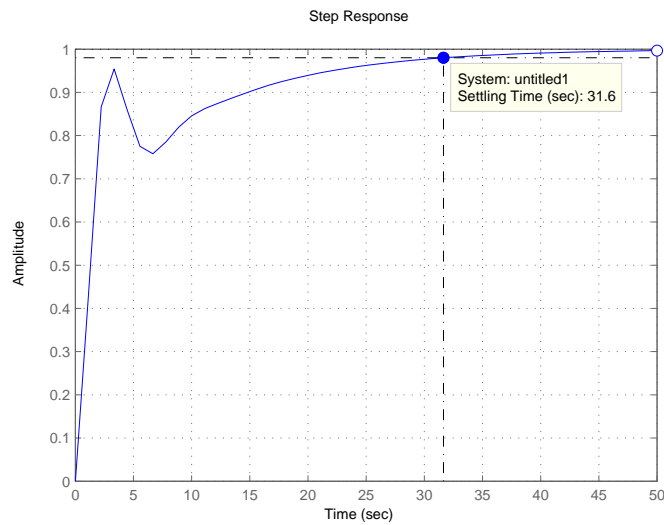
Sprungantwort für  $\alpha_s = 0^\circ$ :



Sprungantwort für  $\alpha_s = 0,25 \cdot \pi$ :



Sprungantwort für  $\alpha_s = -0,25 \cdot \pi$ :



In den Abbildungen erkennt man, dass der Regler für positive  $\alpha_s$  einen deutlich höheren Überschwinger anzeigt. Für negative  $\alpha_s$  ist der Überschwinger geringer, aber die Ausregelzeit ist deutlich höher als für  $\alpha_s = 0$ .

### 6.3 Analyse von Parameteränderungen mit Hilfe der WOK

#### Hausaufgaben

1. Stellen Sie die Gesamtübertragungsfunktion des Pendelschraubers auf. Verwenden Sie die im Skript unter Abschnitt 6.3.2 angegebenen Approximationen. Setzen Sie **noch keine** Werte ein.



Aus

$$G_{\text{Hebel}}(s) = \frac{2\gamma\omega_s H_R}{J_W s^2 + c_W s - k\alpha_s}$$
$$G_{\text{Ventilator}}(s) = \frac{c_M}{LJ_P s^2 + (RJ_P + KL) \cdot s + KR + c_M^2}$$

mit

$$K = \beta\omega_s$$
$$\omega_s = \sqrt{\frac{k}{H_R\gamma}}$$

ergibt sich

$$G(s) = G_{\text{Ventilator}}(s) \cdot G_{\text{Hebel}}(s)$$
$$= \frac{2\gamma\omega_s H_R c_M}{(J_W s^2 + c_W s - k\alpha_s) \cdot ((LJ_P s^2 + RJ_P + KL) \cdot s + KR + c_M^2)}.$$

2. Stellen Sie die Übertragungsfunktion der offenen Regelstrecke auf. Verwenden Sie als Regler

$$G_R(s) = G_{\text{Ventilator}}(s)^{-1} \cdot \frac{c_M}{s}.$$

Da

$$G_R(s) = \frac{c_M}{G_V(s) \cdot s}$$

ergibt sich

$$G_o(s) = \frac{G_H(s) \cdot G_V(s) \cdot c_M}{G_V(s) \cdot s}$$
$$= \frac{G_H(s) \cdot c_M}{s}$$
$$= \frac{2\gamma\omega_s H_R c_M}{(J_W s^2 + c_W s - k\alpha_s) \cdot s}.$$

3. Formen Sie die charakteristische Gleichung des geschlossenen Regelkreises so um, dass sie in der Form  $N_o(s) = -k' \cdot Z_o$  vorliegt, und  $\alpha_s$  den zu variierenden Verstärkungsparameter  $k'$  darstellt.

*Achtung:* Verwechseln Sie nicht die Verstärkung  $k'$  (die in den anderen Beispielen als  $k$  bezeichnet wurde) mit der Konstanten  $k$  aus der Modellbildung (Gleichung (A.17) im Skript).

Das charakteristische Polynom von  $G_o(s)$

$$N_o(s) + k' \cdot Z_o(s) = J_W s^3 + c_W s^2 + 2\gamma \omega_s H_R c_M - k s \cdot \alpha_s$$

muss umgeformt werden, so dass  $\alpha_s$  der variable Parameter  $k'$  ist.

Es folgt:

$$Z_o(s) = -ks$$

$$N_o(s) = J_W s^3 + c_W s^2 + 2\gamma \omega_s H_R c_M$$

ist.

---

### Versuchsdurchführung

---

1. Für welche  $\alpha_s$  arbeitet der Regelkreis stabil? Formen Sie die Übertragungsfunktion analog zur Hausaufgabe unter Verwendung des Reglers aus Aufgabe 6.2.4 mit  $k' = k'_{\max, 5\%}$  entsprechend um. Schreiben Sie hierzu zunächst ein Skript, das die Parameter enthält, so dass Sie mit den Variablen arbeiten können. Geben Sie zum Schluss die für das Erstellen der WOK relevante Gesamtübertragungsfunktion in Pol-/Nullstellenform an.

Zeichnen Sie die Wurzelortskurven. Beachten Sie, dass  $\alpha_s$  positiv und negativ sein kann. Entsprechen die Ergebnisse Ihren Erwartungen? Bitte geben Sie das Skript zum Plotten der WOKs an und erläutern Sie kurz die Ergebnisse.

*Hinweis:* Verwenden Sie die Ergebnisse aus der Hausaufgabe.

Das Skript lautet:

```
%ParameterdesPendelschraubers:
%Ventilator (Teil I):
R = 0.1655e0;
L = 0.534e-5;
cM = 0.62133e-2;
beta = 1/12500000;
gamma = 3.702e-6;
JP = 0.16833e-3;
w_s = 320.87;
K = 2*beta*w_s;
%Pendel (Teil II):
alpha_s = 0;
mP = 0.48e0;
SL = 0.5e0;
SR = 0.15e1;
HR = 0.152e1;
HL = 0.48e0;
g = 0.981e1;
mSR = 0.44e0;
mSL = 0.1404e0;
mL = 0.201134e1;
CW = 0.75e0;
JStange = 0.3417e0;
JGewichte = 0.15724e1;
JW = 0.19141e1;
k = -0.5*mSL*g*SL - mL*g*HL + 0.5*mSR*g*SR + mP*g*HR;
w_s = sqrt(k / (HR*gamma));
```

```

% Regler
k_max = 3.53;
Reg = zpk([-0.3913 -0.1696], 0, 1);

% Übertragungsfunktion für WOK ueber alpha_s
N = 2*gamma*w_s*HR*cM*k_max*Reg ...
 + tf([JW, CW, 0], [1]) ...
 * tf([L*JP, R*JP+K*L, K*R+cM^2], [1]);
Z = - k * tf([L*JP, R*JP+K*L, K*R+cM^2], [1]);
G = Z / N

% Plot
figure
rlocus(G)
title('Eigentliche WOK')
axis([-3 3 -3 3])

figure
rlocus(-G)
title('Uneigentliche WOK')
axis([-3 3 -5 5])

```

Die sich aus dem charakteristische Polynom  $N_o(s) + \alpha_s \cdot Z_o(s)$  ergebende Übertragungsfunktion  $G(s) = \frac{Z_o(s)}{N_o(s)}$  lautet:

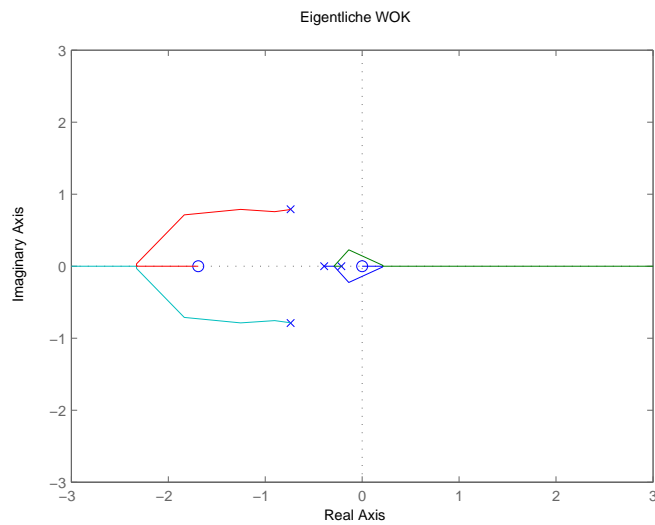
```

G =
 -0.30267 s (s+3.099e04) (s+1.691)

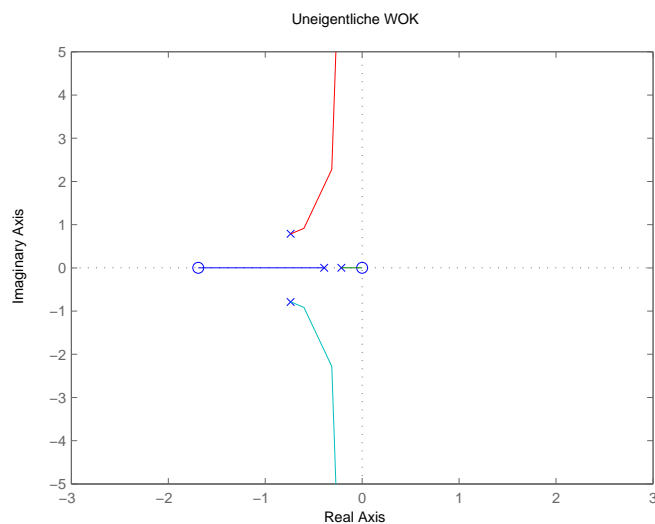
(s+3.099e04) (s+0.3913) (s+0.2157) (s^2 + 1.476s + 1.168)
Continuous-time zero/pole/gain model.

```

Eigentliche parameterabhängige WOK mit dem Regler aus Versuch 5 geregelt in Abhängigkeit von  $\alpha_s$ :



Komplementäre parameterabhängige WOK mit dem Regler aus Versuch 5 geregelt in Abhängigkeit von  $\alpha_s$ :



Man erkennt, dass die eigentliche WOK für kleine Winkel  $\alpha_s$  im stabilen Bereich liegt. Die gesamte komplementäre WOK liegt im negativen Bereich der s-Halbebene und ist somit stabil.

2. Lesen Sie das  $\alpha_s$  ab, bei dem der Regler nicht mehr stabil ist. Welchem Winkel in  $^\circ$  entspricht dieser Wert?

$$\alpha_s \approx 1,3534 = 77,54^\circ$$

- 
3. Entspricht dieser Wert Ihren Erwartungen (vgl. der Sprunghöhen aus Versuch 5)? Begründen Sie ggf. die Abweichung und Bewerten Sie das Ergebnis bzgl. der Eignung für die Systemanalyse.

Prinzipiell entsprechen die WOK den Erwartungen. Zu große positive  $\alpha_s$  lassen das System instabil werden. Bei negativen  $\alpha_s$  bleibt das System stabil.  
Allerdings ist der Pendelschrauber in Versuch 5 bei Einsatz des PID-Reglers mit  $k_p = 0,3266$  bei einer Sprunghöhe von  $\alpha_s \approx 0,2 = 11,46^\circ$  bereits instabil.  
Die deutlich höhere Robustheit, welche gemäß WOK ergibt, ist in der Approximation  $\sin(\alpha_s) = \alpha_s$  bzw.  $\cos(\alpha_s) = 1$  begründet.  
Die Approximation ist nicht zur Systemanalyse geeignet.